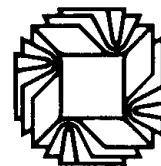
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 5

COMBINATÓRIA PROBABILIDADE

43 Exercícios resolvidos
290 Exercícios propostos — com resposta
149 Testes de Vestibulares — com resposta

3ª edição

ATUAL EDITORA

Capa

Roberto Franklin Rondino
Sylvio Ulhoa Cintra Filho
Rua Inhambu, 1235 – S. Paulo

Composição e desenhos

AM Produções Gráficas Ltda.
Rua Castro Alves, 135 – S. Paulo

Artes

Atual Editora Ltda.

Fotolitos

H.O.P. Fotolitos Ltda.
Rua Delmira Ferreira, 325 – S. Paulo

Impressão e acabamento

Gráfica Editora Hamburg Ltda.
Rua Apeninos, 294
278-1620 – 278-2648 – 279-9776
São Paulo – SP – Brasil

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

F977 v.1-2, 4-6

Fundamentos de matemática elementar [por] Gelson Iezzi [e outros] São Paulo, Atual Ed., 1977-

Co-autores: Carlos Murakami, Osvaldo Dolce e Samuel Hazzan; a autoria dos volumes individuais varia entre os 4 autores.
Conteúdo: v.1. Conjuntos, funções.-v.2. Logaritmos.-v.4. Seqüencias, matrizes determinantes, sistemas.-v.5. Combinatória, probabilidade.-v.6. Complexos, polinômios, equações.

1. Matemática (2º grau) I. Dolce, Osvaldo, 1938- II. Iezzi, Gelson, 1939- III. Hazzan, Samuel, 1946- IV. Murakami, Carlos, 1943-

77-1333 CDD-510

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colegial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colegial mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim, ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e sua obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

CAPÍTULO I — ANÁLISE COMBINATÓRIA

CAPÍTULO II — BINÔMIO DE NEWTON

CAPÍTULO III — PROBABILIDADE

John Von Neumann
(1903 - 1957)

Computadores — as máquinas com memória

John Von Neumann nasceu em Budapeste; foi professor em Berlim e Hamburgo.

Em 1930, indo para a América do Norte, tornou-se juntamente com Einstein, um dos primeiros membros permanentes do Instituto de Estudos Avançados.

Em 1944 e 1946, Von Neumann ajudou a preparar o relatório para o exército sobre capacidade dos computadores e em 1949 o primeiro computador com programa em reserva passou a ser utilizado.

A era da computação eletrônica começou por volta de 1925 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (M.I.T.) onde se construiu uma grande calculadora com motores elétricos e uma parte mecânica mas ainda muito vagarosa.

Em 1930, a International Business Machines Corporation (IBM) construiu o MARK I, uma calculadora eletromecânica totalmente automática, superada logo depois pelo ENIAC que era baseado em fluxo de elétrons através de tubos de vácuo, construído devido às necessidades militares da época sendo que um dos responsáveis pelo projeto foi Von Neumann.

Em 1951 surgiu o UNIVAC I, hoje ultrapassado.

Von Neumann é considerado um dos mais versáteis e criativos matemáticos, o primeiro a dar um tratamento novo à Matemática Econômica. Sua obra *"Teoria dos Jogos e Conduta Econômica"*, de 1944, teve papel fundamental no desenvolvimento das Ciências Sociais.

Juntamente com Wiener, dedicou-se à teoria quântica sendo nomeado em 1955 para a Comissão de Energia Atômica Americana.

Von Neumann não só se dedicou à Matemática Aplicada como também fez muitas contribuições à Matemática Pura, em Teoria dos Conjuntos, Teoria dos Grupos, Cálculo Operacional, Probabilidades, Lógica Matemática e Fundamentos.

Em 1929 deu ao "espaço de Hilbert" esse nome e seus principais axiomas bem como sua forma abstrata atual, mostrando valorizar as descobertas anteriores sobre as quais expandiu seu campo de pesquisas.

CAPÍTULO I

ANÁLISE COMBINATÓRIA

I. INTRODUÇÃO

1. A análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, *agrupamentos formados sob certas condições.*

A primeira vista pode parecer desnecessária a existência destes métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase que impossível, sem o uso de métodos especiais.

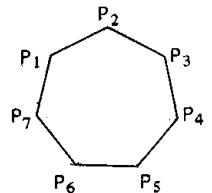
Vejamos alguns exemplos. Usaremos a notação $\# M$ para indicar o número de elementos de um conjunto M.

2. Exemplos

1º) A é o conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 1, 2 e 3.

$A = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$ e $\#A = 6$

2º) B é o conjunto das diagonais de um heptágono

$B = \{\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_5}, \overline{P_1P_6}, \overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_2P_7}, \overline{P_3P_5}, \overline{P_3P_6}, \overline{P_3P_7}, \overline{P_4P_6}, \overline{P_4P_7}, \overline{P_5P_7}\}$
e $\#B = 14$.

3º) C é o conjunto das seqüências de letras que se obtêm, mudando-se a ordem das letras da palavra ARI (anagramas da palavra ARI).

$C = \{ARI, AIR, IRA, IAR, RAI, RIA\}$ e $\#C = 6$

4º) D é o conjunto de números de três algarismos, todos distintos, formados a partir dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

$D = \{123, 124, 125, \ldots, 875, 876\}$

Pode-se perceber que é trabalhoso obter todos os elementos (agrupamentos) deste conjunto e depois contá-los. Corre-se risco de haver omissão ou repetição de agrupamentos. Usando técnicas que iremos estudar adiante, veremos que $\#D = 336$.

II. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

3. Tal princípio consta de duas partes (A e B) ligeiramente diferentes. Antes de enunciar e demonstrar este princípio, vamos provar dois lemas (teoremas auxiliares).

4. Lema 1

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

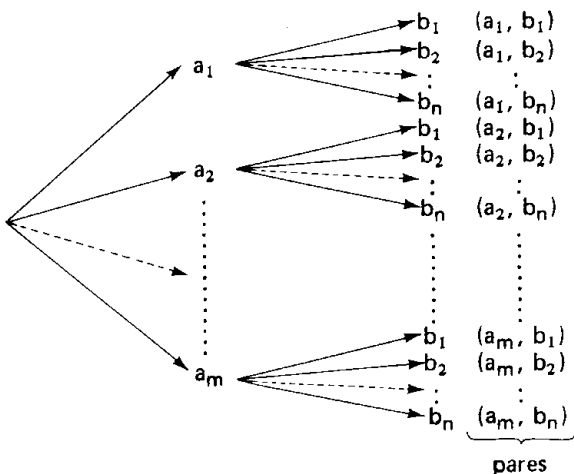
Demonstração

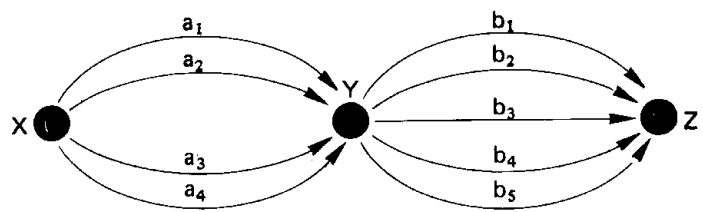
Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$\begin{array}{c} m \\ \text{linhas} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1),\ (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n) \longrightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n) \longrightarrow n \text{ pares} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (a_m, b_1),\ (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n) \longrightarrow n \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + \ldots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$

Uma outra forma de visualisarmos os pares ordenados é através do diagrama abaixo, conhecido como *diagrama seqüencial* ou *diagrama da árvore.*

5. Exemplos

1º) Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

Sejam:

A o conjunto das rodovias que ligam X com Y e

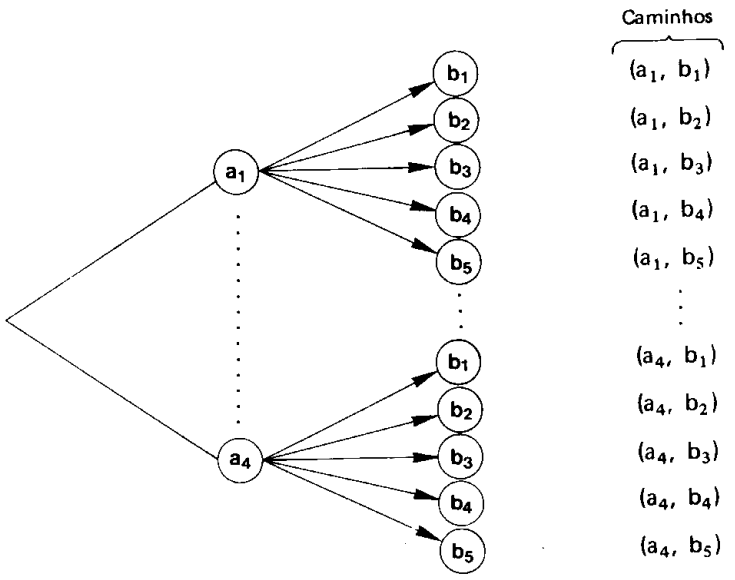
B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z:

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

Cada modo de efetuar a viagem de X até Z pode ser considerado como um par de estradas (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Logo, o número de pares ordenados (ou de modos de viajar de X até Z) é

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Os caminhos possíveis podem ser obtidos no diagrama da árvore.

2º) Quantos números de dois algarismos (distintos ou não) podem ser formados, usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) onde $a \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ e $b \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$.

Logo o resultado procurado é

$$8 \cdot 8 = 64.$$

6. Lema 2

O número de pares ordenados (a_i, a_j) tais que

$a_i \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $a_i \neq a_j$ (para $i \neq j$) é $m(m-1)$

Demonstração

Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo.

Teremos:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{llll} (a_1, a_2), & (a_1, a_3), \dots & (a_1, a_m) & \rightarrow (m-1) \text{ pares} \\ (a_2, a_1), & (a_2, a_3), \dots & (a_2, a_m) & \rightarrow (m-1) \text{ pares} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (a_m, a_1), & (a_m, a_2), \dots & (a_m, a_{m-1}) & \rightarrow (m-1) \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número de pares é

$$\underbrace{(m-1) + (m-1) + \dots + (m-1)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot (m-1)$$

7. Exemplo

Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) onde

$a \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $b \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ e $a \neq b$,

então o resultado procurado será $8 \cdot 7 = 56$.

Observemos que o diagrama de árvore pode ser usado para obtermos os números formados, notando apenas que, uma vez tomado um elemento na 1ª etapa do diagrama, ele não poderá aparecer na 2ª etapa.

8. Parte A) O princípio fundamental da contagem

Consideremos r conjuntos

$$\begin{array}{ll} A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} & \#A = n_1 \\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\} & \#B = n_2 \\ \vdots & \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_r}\} & \#Z = n_r \end{array}$$

então, o número de r-uplas ordenadas (seqüências de r elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \dots, z_p)$$

onde $a_i \in A$, $b_j \in B \dots z_p \in Z$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r.$$

Demonstração (Princípio da Indução Finita)

Se $r = 2$ é imediato, pois caímos no lema 1 já visto.

Suponhamos que a fórmula seja válida para o inteiro $(r-1)$ e provemos que daí decorre que ela seja válida para o inteiro *r*.

Para $(r-1)$ tomemos as seqüências de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, \dots, w_k)$.

Por hipótese de indução, existem

$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{r-1}$ seqüências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z.

Cada seqüência $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ consiste de uma seqüência $(a_i, b_j, \dots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo lema 1, o número de seqüências do tipo $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ é

$(n_1 \cdot n_2 \dots n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{r-1} \cdot n_r$.

Segue-se então que o teorema é válido $\forall\, r \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 2$.

9. Exemplo

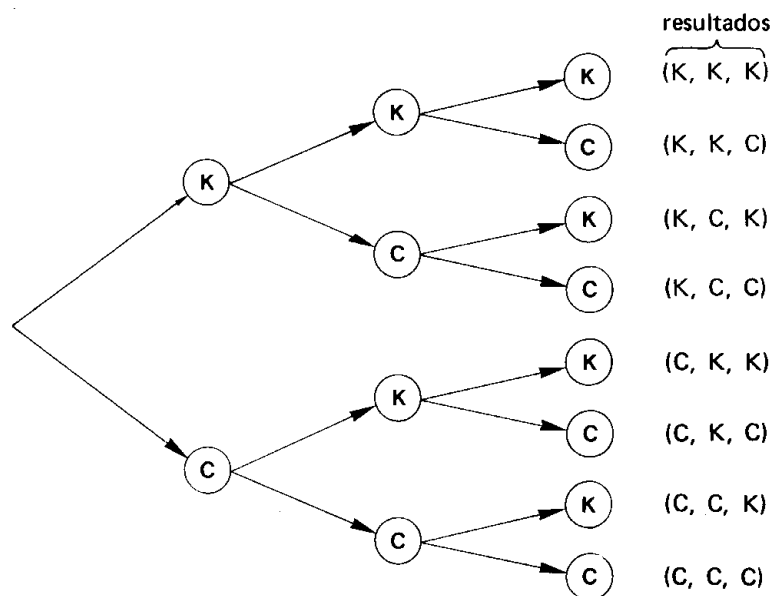
Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de seqüências possíveis de cara e coroa?

Indiquemos por *K* o resultado cara e *C* o resultado coroa.

Queremos o número de triplas ordenadas (a, b, c) onde

$a \in \{K, C\}$ $b \in \{K, C\}$ e $c \in \{K, C\}$, logo, o resultado procurado é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

As seqüências podem ser obtidas através de um diagrama da árvore.

10. Parte B) O princípio fundamental da contagem

Consideremos um conjunto A com $m (m \geqslant 2)$ elementos. Então o número r-uplas ordenadas (seqüências com *r* elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)].}_{\text{r fatores}}$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ o número de seqüências do tipo

$$\underbrace{(a_j, a_\ell, \ldots, a_i, \ldots, a_k)}_{\text{r elementos}}$$

com $\begin{cases} a_i \in A \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ a_i \neq a_p \text{ para } i \neq p \end{cases}$ é

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{\text{r fatores}}$$

A demonstração é feita por Indução Finita, de modo análogo, à feita na parte A.

11. Exemplos

1º) Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c) onde *a* representa o atleta que chegou em 1º lugar, *b* o que chegou em segundo, e *c* o que chegou em terceiro.

a e *b* e *c* pertencem ao conjunto dos atletas e $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.

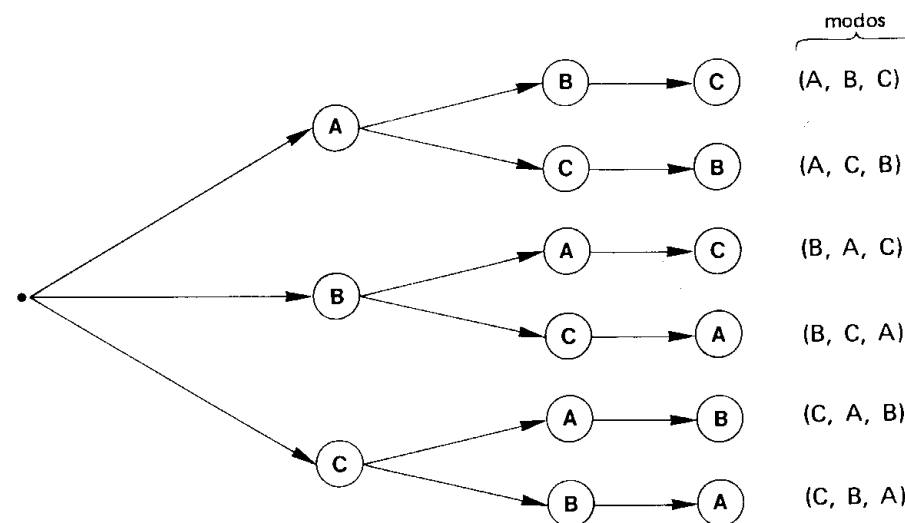
Logo, o número de resultados possíveis é

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

2º) De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Cada modo, corresponde a uma tripla ordenada de pessoas. Logo o resultado procurado é

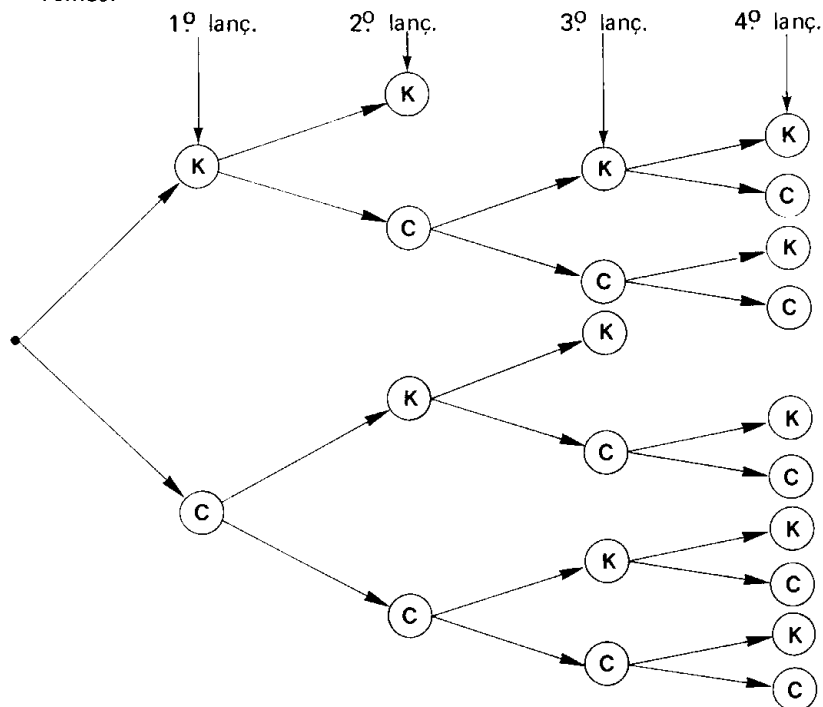
$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Se chamarmos A, B e C as pessoas, os modos podem ser obtidos através do diagrama de árvore.

12. Observação

Algumas vezes, o conjunto cujos elementos queremos contar consta de seqüências de tamanhos diferentes (isto é, o número de elementos das seqüências consideradas é diferente), o que impede o uso do princípio fundamental da contagem. Entretanto, usando o diagrama de árvore, podemos saber facilmente quantas são as seqüências.

13. Exemplo

Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou quatro lançamentos sejam feitos, o que primeiro ocorrer. Quais as seqüências de resultados possíveis?

Temos:

Os resultados possíveis são:

(K, K); (K, C, K, K); (K, C, K, C); (K, C, C, K); (K, C, C, C); (C, K, K); (C, K, C, K); (C, K, C, C); (C, C, K, K); (C, C, K, C); (C, C, C, K); (C, C, C, C);

e o número de seqüências é 12.

EXERCÍCIOS

E.1 Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

E.2 Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

E.3 Numa festa existem 80 homens e 90 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

E.4 Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

E.5 Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?

E.6 De quantas formas podemos responder a 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são: sim ou não?

Solução

Cada resposta do questionário todo, consta de uma seqüência

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$$

onde cada a_i vale S (sim) ou N (não). Além disso

$$a_1 \in A_1 = \{S, N\}$$
$$a_2 \in A_2 = \{S, N\}$$
$$\vdots$$
$$a_{12} \in A_{12} = \{S, N\}$$

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de seqüências do tipo acima é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{12 \text{ vezes}} = 2^{12}$$

E.7 Uma prova consta de 20 testes tipo Verdadeiro ou Falso. De quantas formas uma pessoa poderá responder os 20 testes?

E.8 Quantos anagramas podemos formar, batendo ao acaso em 6 teclas (escolhidas entre as 26 existentes) numa máquina de escrever? Entre eles consta o anagrama TECTEC?

E.9 (ENE) Num concurso para preenchimento de uma cátedra, apresentam-se 3 candidatos. A comissão julgadora é constituída de 5 membros, devendo cada examinador escolher exatamente um candidato. De quantos modos os votos desses examinadores podem ser dados?

E.10 Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?

E.11 Temos um conjunto de 10 nomes e outro de 20 sobrenomes. Quantas pessoas podem receber um nome e um sobrenome, com esses elementos?

E.12 Cinco moedas são lançadas. Quantas seqüências possíveis de caras e coroas existem?

E.13 Seis dados são lançados simultaneamente. Quantas seqüências de resultados são possíveis, se considerarmos cada elemento da seqüência como o número obtido em cada dado?

E.14 Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

Solução

Cada número telefônico consiste em uma seqüência de 7 dígitos do tipo:

$(a_1, a_2, \dots, a_6, a_7)$ onde $a_1 \in A_1 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$\vdots$

$a_7 \in A_7 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de seqüências é:

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ \dots \cdot 10}_{7 \text{ vezes}} = 10^7 = 10\,000\,000$$

E.15 As letras em código MORSE são formadas por seqüências de traços (—) e pontos (•) sendo permitidas repetições. Por exemplo: (—; • ; —; —; • ; •).

Quantas letras podem ser representadas:

a) usando exatamente 3 símbolos?

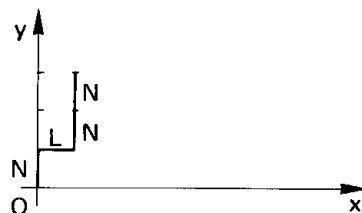
b) usando no máximo 8 símbolos?

E.16 Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal de eixos Ox e Oy. Ele pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Quantas trajetórias ele pode percorrer se der exatamente 4 passos.

Solução

Notemos que cada trajetória consiste em uma quádrupla ordenada (a_1, a_2, a_3, a_4) onde

$a_1 \in \{N, L\}$, $a_2 \in \{N, L\}$, $a_3 \in \{N, L\}$ e $a_4 \in \{N, L\}$.

Por exemplo, (N, L, N, N) corresponde graficamente a:

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de trajetórias (quádruplas ordenadas) é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

E.17 Resolver o problema anterior, se o homem der exatamente 6 passos. Dê o gráfico de 3 trajetórias possíveis.

E.18 Quantos divisores positivos tem o número 3.888 = $2^4 \cdot 3^5$?

Solução

Cada divisor é um número do tipo $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$ onde $\alpha_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\alpha_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Exemplo: $2^3 \cdot 3^5$; $2^0 \cdot 3^3$; $2^2 \cdot 3^0$ etc.

Portanto, o número de divisores é o número de pares ordenados (α_1, α_2) que, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

E.19 Quantos divisores positivos tem o número $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$?

E.20 Cada pedra de dominó é constituída de 2 números. As peças são simétricas, de sorte que o par de números não é ordenado. Exemplo:

 é o mesmo que

Quantas peças diferentes podem ser formadas, se usarmos os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

E.21 A e B são conjuntos tais que #A = n e #B = r. Quantas funções f: A → B existem?

E.22 Em um baralho de 52 cartas, cinco cartas são escolhidas sucessivamente. Quantas são as seqüências de resultados possíveis:

a) se a escolha for feita com reposição?

b) se a escolha for feita sem reposição?

Solução

a) Seja A o conjunto das cartas do baralho. Temos #A = 52.
Cada escolha consta de uma seqüência do tipo

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

onde $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_3 \in A$, $a_4 \in A$, $a_5 \in A$ (pois a escolha foi feita com reposição). Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte A), o número de seqüências é:

$$\underbrace{52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52}_{5 \text{ vezes}} = 52^5$$

b) Se a escolha é feita sem reposição então cada seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ é tal que cada elemento pertence a A e são todos elementos distintos.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte B), o número de seqüências é

$$\underbrace{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}_{5 \text{ fatores}} = 311\,875\,200$$

E.23 Duas pessoas, Antônio e Benedito, praticam um jogo, onde em cada partida, há um único vencedor. O jogo é praticado até que um deles ganhe 2 partidas consecutivas ou 4 partidas tenham sido jogadas, o que ocorrer primeiro. Quais as seqüências possíveis de ganhadores?

(*Sugestão*: construa o diagrama da árvore)

E.24 Uma urna tem 10 bolinhas numeradas 1, 2, 3, . . . , 10. Três bolinhas são extraídas sucessivamente, sem reposição. De quantas formas os números das bolinhas formam uma P.A. na ordem em que foram extraídas?

(*Sugestão*: construa o diagrama da árvore)

III. CONSEQÜÊNCIAS DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem fornece-nos o instrumento básico para a Análise Combinatória, entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formarmos agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

IV. ARRANJOS COM REPETIÇÃO

14. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos *arranjo com repetição* dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (seqüência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

15. Exemplo

Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis seqüências de cores observadas?

Temos:

Cada seqüência é um par ordenado de cores (x, y) onde $x, y \in M = \{V, B, A\}$. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte A), o número de pares é

$$3 \cdot 3 = 9.$$

16. Fórmula do Número de Arranjos com Repetição

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r.

Cada arranjo com repetição é uma seqüência de r elementos, onde cada elemento pertence a M.

$$\underbrace{(-, -, -, \ldots, -)}_{\text{r elementos}}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será

$$\boxed{(AR)_{m,r} = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{r vezes}} = m^r}$$

Observemos que se $r = 1$, $(AR)_{m,1} = m$ e a fórmula acima continua válida $\forall\, r \in \mathbb{N}^*$

V. ARRANJOS

17. Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ a qualquer r'upla (seqüência de r elementos) formada com elementos de M *todos distintos*.

18. Exemplo

$M = \{a, b, c, d\}$.

Os arranjos dos quatro elementos de M, tomados dois a dois, são os pares ordenados (x, y) formados com elementos distintos de M.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte B), o número de pares ordenados é:

$$4 \cdot 3 = 12.$$

19. Fórmula do Número de Arranjos

Seja $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos *m* elementos tomados *r* a *r*.

Cada arranjo é uma seqüência de *r* elementos, onde cada elemento pertence a M, e são todos distintos.

$$\underbrace{(-, -, \dots, -)}_{r \text{ elementos}}$$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte B) o número de arranjos $A_{m,r}$ será

$$A_{m,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

Em particular, se $r = 1$, é fácil perceber que $A_{m,1} = m$.

Notemos ainda que de acordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente que $1 \leqslant r \leqslant m$.

20. Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências de cartas são possíveis de se obter?

Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z) onde x é a 1ª carta extraída, y a 2ª e z a 3ª. Observemos que x, y, z são todas distintas visto que a *extração é feita sem reposição*.

Logo, o número que queremos é $A_{52,3}$ isto é

$$A_{52,3} = \underbrace{52 \cdot 51 \cdot 50}_{3 \text{ fatores}} = 132\,600$$

VI. PERMUTAÇÕES

21. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos *m* elementos a todo arranjo em que $r = m$.

22. Exemplo

Seja $M = \{a, b, c\}$

As permutações dos elementos de M, são todos os arranjos constituídos de 3 elementos.

São eles:

(a, b, c) (b, a, c) (c, a, b) (a, c, b) (b, c, a) (c, b, a).

23. Fórmula do Número de Permutações

Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e indiquemos por P_m o número de permutações dos m elementos de M.

Temos:

$$P_m = A_{m,m}, \text{ logo}$$

$$P_m = m(m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot [m-(m-1)]$$

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular se $m = 1$ é fácil perceber que $P_1 = 1$.

24. Exemplo

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Notemos que cada forma de ficar em fila indiana, é uma permutação das 5 pessoas. O número de permutações (modos de ficar em fila indiana) será:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

VII. FATORIAL

25. Afim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, bem como outras que iremos estudar, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$) definimos *fatorial de m* (e indicamos por m!) através da relação:

$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $m \geqslant 2$
$1! = 1$
$0! = 1$

As definições 1! e 0! serão justificadas posteriormente.

26. Exemplo

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

27. O cálculo de m! diretamente, torna-se trabalhoso a medida que m aumenta.

$(10! = 3\,628\,800)$

Entretanto, muitos cálculos podem ser simplificados se notarmos que

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!} = (n+1) \cdot n!$$

28. Exemplos

1) Calcular $\frac{10!}{9!}$

Temos: $\frac{10!}{9!} = \frac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10.$

2) Calcular $\frac{10!}{8!}$

Temos: $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90.$

3) Calcular $\frac{12!}{9!\,3!}$

Temos:

$$\frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220.$$

29. As fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, também podem ser simplificadas com a notação fatorial.

De fato:

$P_m = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$

$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) =$

$$= m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-r+1) \cdot \frac{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-r) \cdot (m-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\boxed{A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}\ .}$$

Em particular $\begin{cases} P_1 = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$

e a fórmula $P_m = m!$ é válida $\forall\ m \in \mathbb{N}^*$

e ainda

em particular $\begin{cases} A_{m,1} = m & \forall\ m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{m!}{(m-1)!} = m & \forall\ m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$

e a fórmula $A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$ é válida $\forall\ m \in \mathbb{N}^*, \forall\ r \in \mathbb{N}^*$ com $r \leqslant m$.

EXERCÍCIOS

E.25 Usando o diagrama da árvore, obter todos os arranjos dos elementos de $M = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

E.26 Calcule:

a) $A_{6,3}$; b) $A_{10,4}$; c) $A_{20,1}$; d) $A_{12,2}$.

E.27 Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

E.28 Em um torneio (de dois turnos) do qual participam seis times, quantos jogos são disputados?

E.29 Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listras, cada listra com uma cor. De quantas formas isto pode ser feito?

Solução

Cada maneira de pintar a bandeira consiste de uma seqüência de cinco cores distintas (seqüência, porque as listras da bandeira estão numa ordem) escolhidas entre as oito existentes. Logo, esse número de seqüências procurado é:

$$A_{8,5} = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{5 \text{ fatores}} = 6\,720.$$

E.30 Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada respectivamente?

E.31 As 5 finalistas do concurso para Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Finlândia, Miss Argentina e Miss Noruega. De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, segundo e o terceiro lugares neste concurso?

E.32 Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, . . . , 9. O segredo do cofre é formado por uma seqüência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abrí-lo. (Suponha que a pessoa sabe que o segredo é formado por dígitos distintos).

E.33 Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem sentar-se, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas.

Solução

Inicialmente notemos que cada maneira delas sentarem, corresponde a um par ordenado de números distintos escolhidos entre 1, 2, . . . , 10.

Exemplo: (2, 6) $\begin{cases}\text{a pessoa A senta na cadeira 2}\\ \text{a pessoa B senta na cadeira 6}\end{cases}$

(6, 2) $\begin{cases}\text{a pessoa A senta na cadeira 6}\\ \text{a pessoa B senta na cadeira 2}\end{cases}$

(3, 4) $\begin{cases}\text{a pessoa A senta na cadeira 3}\\ \text{a pessoa B senta na cadeira 4.}\end{cases}$

Inicialmente, calculamos o total de pares ordenados que é igual a $A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$.

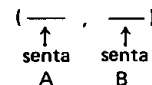
Agora temos que excluir os pares ordenados cujos elementos sejam números consecutivos. São eles:

(1, 2) (2, 3) (3, 4) . . . (9, 10) : 9 pares
(2, 1) (3, 2) (4, 3) . . . (10, 9) : 9 pares

Ao todo, devemos excluir 9 + 9 = 18 pares.

Logo, o número de maneiras das pessoas sentarem, havendo ao menos uma cadeira entre elas é 90 − 18 = 72.

É bastante importante o leitor notar a razão pela qual cada maneira é um par ordenado.

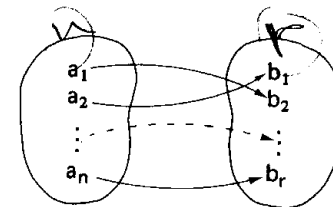
$$(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{senta}\\ \text{A}}}{___}\ ,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{senta}\\ \text{B}}}{___})$$

E.34 Uma urna contém *m* bolas numeradas de 1 até m; r(r ⩽ m) bolas são extraídas sucessivamente. Qual o número de seqüências de resultados possíveis se a extração for:
a) com reposição de cada bola após a extração,
b) sem reposição de cada bola após a extração.

E.35 Uma urna I contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. Outra urna II contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Qual o número de seqüências numéricas que podemos obter se extrairmos, sem reposição 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II.

E.36 Existem duas urnas. A 1ª com 4 bolas numeradas de 1 a 4 e a 2ª com 3 bolas numeradas de 7 a 9. Duas bolas são extraídas da 1ª urna, sucessivamente e sem reposição, e em seguida 2 bolas são extraídas da 2ª urna, sucessivamente e sem reposição.
Quantos números (de 4 algarismos) são possíveis de serem formados nestas condições?

E.37 Se A e B são conjuntos e #A = n e #B = r, quantas funções f: A → B, injetoras existem? (1 ⩽ n ⩽ r)

Solução

Sejam $\begin{cases}A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}\end{cases}$

Notemos que se f é injetora, então $f(a_i) \neq f(a_j)$ para todo $a_i \neq a_j$.

Por outro lado, cada função vai ser definida por uma n'upla de imagens, onde todos os elementos da n'upla devem ser distintos, pois a função é injetora.

Por exemplo, uma das funções é definida pela n'upla de imagens.

$$(\underset{\substack{\uparrow\\ f(a_1)}}{b_1},\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_2)}}{b_2},\ \ldots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_k)}}{b_k},\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_{k+1})}}{b_{k+1}},\ \ldots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_n)}}{b_n})$$

Outra função é definida pela n'upla

$$(\underset{\substack{\uparrow\\ f(a_1)}}{b_n},\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_2)}}{b_{n-1}},\ \ldots\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_{n-k})}}{b_{k+1}},\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_{n-k+1})}}{b_k},\ \ldots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_{n-1})}}{b_2},\ \underset{\substack{\uparrow\\ f(a_n).}}{b_1})$$

Logo, o número de funções é o número de arranjos dos *r* elementos de B, tomados *n* a *n*, isto é, $A_{r,n} = \dfrac{r!}{(r-n)!}$.

E.38 Sejam A e B dois conjuntos tais que $\#A = \#B = n > 0$. Quantas funções $f: A \to B$ bijetoras existem?

E.39 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

E.40 Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

Solução

Cada número, será uma tripla ordenada de algarismos escolhidos entre os dados. Como estamos interessados nos números pares, então nos interessam as triplas do tipo:

$$(-, -, 6) \quad (I)$$

ou

$$(-, -, 8) \quad (II)$$

o número de triplas do tipo (I) é $A_{5,2} = 20$ e o de triplas do tipo (II) é $A_{5,2} = 20$. Logo, o resultado procurado é $20 + 20 = 40$.

E.41 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números com algarismos distintos existem entre 500 e 1000?

E.42 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) existem?

E.43 Com os algarismos 1, 2, 3, . . . , 9 quantos números de quatro algarismos existem, onde pelo menos dois algarismos são iguais?

E.44 Quantos números formados por 3 algarismos distintos escolhidos entre 2, 4, 6, 8, 9 contêm o 2 e não contém o 6? (Lembre-se que o 2 pode ocupar a 1ª, 2ª ou a 3ª posição).

E.45 Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos arranjos desses dígitos tomados 4 a 4 têm o dígito 1 antes do 4?

E.46 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

E.47 Com os dígitos 2, 5, 6, 7 quantos números formados por 3 dígitos distintos ou não são divisíveis por 5?

E.48 Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtém permutando-se os algarismos 1, 2, 4, 6, 8, que lugar ocupa o número 68 412?

Solução

Esse número é precedido pelos números da forma:

(I) $(1, -, -, -, -)$ que são em número de $P_4 = 4!$

(II) $(2, -, -, -, -)$ que são em número de $P_4 = 4!$

(III) $(4, -, -, -, -)$ que são em número de $P_4 = 4!$

(IV) $(6, 1, -, -, -)$ que são em número de $P_3 = 3!$

(V) $(6, 2, -, -, -)$ que são em número de $P_3 = 3!$

(VI) $(6, 4, -, -, -)$ que são em número de $P_3 = 3!$

(VII) $(6, 8, 1, -, -)$ que são em número de $P_2 = 2!$

(VIII) $(6, 8, 2, -, -)$ que são em número de $P_2 = 2!$

De (I), (II), . . . , (VIII) concluímos que 68 412 é precedido por um total de $4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 3! + 2! + 2! = 94$ números. Portanto a posição de 68 412 é a 95º.

E.49 Formados e dispostos em ordem crescente os números que se obtém permutando-se os algarismos 2, 3, 4, 8 e 9, que lugar ocupa o número 43 892?

E.50 De quantas formas podemos preencher um cartão da loteria esportiva, com um único prognóstico duplo e todos os outros, simples?

E.51 Uma peça para ser fabricada deve passar por 7 máquinas, sendo que a operação de cada máquina independe das outras. De quantas formas as máquinas podem ser dispostas para montar a peça?

E.52 Com relação a palavra TEORIA:

a) Quantos anagramas existem?
b) Quantos anagramas começam por T?
c) Quantos anagramas começam por T e terminam com A?
d) Quantos anagramas começam por vogal?
e) Quantos anagramas tem as vogais juntas?

Solução

a) Cada anagrama é uma permutação das letras T, E, O, R, I, A. Logo o número procurado é:

$$P_6 = 6! = 720.$$

b) T _ _ _ _ _

Neste caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I, A. Logo o número procurado é:

$$P_5 = 5! = 120.$$

c) T _ _ _ _ A

Nesse caso temos somente que permutar as letras E, O, R, I. Logo o número procurado é:

$$P_4 = 4! = 24.$$

d) Temos as seguintes possibilidades:

A _ _ _ _ _ $5! = 120$ anagramas
E _ _ _ _ _ $5! = 120$ anagramas
I _ _ _ _ _ $5! = 120$ anagramas
O _ _ _ _ _ $5! = 120$ anagramas

Logo, ao todo teremos: $120 + 120 + 120 + 120 = 480$ anagramas.

e) Se as vogais A, E, I, O devem estar juntas, então elas funcionam como "uma letra" que deve ser permutada com T e R. Logo o número de permutações é:

$$P_3 = 3! = 6.$$

Todavia, em cada uma dessas permutações, as vogais podem se permutar entre si, de $4! = 24$ formas.

Logo, o número de anagramas nestas condições é

$$6 \cdot 24 = 144.$$

E.53 Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoante?

E.54 (MAPOFEI–75) Quantas palavras distintas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO? Quantas começam com a sílaba PER?

E.55 Quantos anagramas da palavra PASTEL começam e terminam por consoante?

E.56 De quantas formas podemos colocar 8 torres num tabuleiro de xadrez de modo que nenhuma torre possa "comer" outra?

E.57 Em um "horário especial" um diretor de televisão dispõe de 7 intervalos para anúncios comerciais. Se existirem 7 diferentes tipos de anúncios, de quantas formas o diretor poderá colocar os 7 nos intervalos destinados a eles?

E.58 Dez pessoas, por entre elas Antônio e Beatriz, devem ficar em fila. De quantas formas isto pode ser feito se Antônio e Beatriz devem ficar sempre juntos?

Solução

Se Antônio e Beatriz devem ficar juntos, eles funcionam como "uma única pessoa", que junto com as outras 8 devem ser permutadas, dando um total de $9!$ permutações.

Entretanto, em cada uma dessas permutações, Antônio e Beatriz podem ser permutados *entre si* (AB ou BA) de $2! = 2$ formas.

Logo o total de permutações em que eles aparecem juntos (AB ou BA) é: $2 \cdot 9!$

E.59 De quantas formas 4 homens e 5 mulheres podem ficar em fila se:
a) os homens devem ficar juntos,
b) os homens devem ficar juntos e as mulheres também?

E.60 Temos 5 meninos e 5 meninas. De quantas fórmas eles podem ficar em fila se meninos e meninas ficam em posições alternadas?

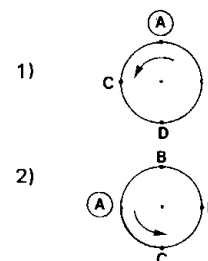
E.61 De quantas formas 6 pessoas podem sentar-se numa fileira de 6 cadeiras se duas delas (Geraldo e Francisco) se recusam sentar um ao lado do outro?

E.62 Temos numa estante 15 livros, dos quais 4 são de Matemática. De quantas formas podemos colocá-los em ordem na estante, de modo que os livros de Matemática fiquem sempre juntos?

E.63 De quantas formas 4 pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

Solução

Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, cada disposição possível, chamamos de *permutação circular*. Além disso, duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam seqüências iguais.

Por exemplo, consideremos as permutações circulares:

1)

tomando o elemento A, a seqüência encontrada é (A, C, D, B).

2)

Tomando o elemento A, a seqüência encontrada é: (A, C, D, B).

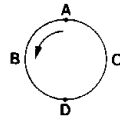
Logo as duas permutações circulares são iguais. A igualdade das duas *permutações circulares* acima poderia ser observada, tomando-se outro elemento diferente de A. Por exemplo D. Em (1) encontraremos a seqüência (D, B, A, C) e em (2) encontraremos a seqüência (D, B, A, C). Para resolvermos o exercício proposto, chamemos de x o número de *permutações circulares*. Notemos que a cada permutação circular de A, B, C, D corresponde 4 permutações de A, B, C, D.

Por exemplo: à *permutação circular* do exemplo, correspondem as permutações:

(A, C, D, B);
(C, D, B, A);
(D, B, A, C),
(B, A, C, D).

Por outro lado, no conjunto das permutações, a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular. Por exemplo:

(A, B, D, C)
(B, D, C, A)
(D, C, A, B)
(C, A, B, D)

correspondem a permutação circular:

A cada conjunto de 4 permutações que definem uma determinada *permutação circular*, chamamos *classe*.

Como temos x permutações circulares, teremos x classes.

Observemos que a intersecção de duas classes distintas é o conjunto vazio.

Logo, o número de permutações de A, B, C, D pode ser calculado de dois modos:

1º) $P_4 = 4!$.

2º) existem x classes cada qual com 4 permutações, logo o total de permutações é $4 \cdot x$.

Portanto:

$$4 \cdot x = 4! \Rightarrow x = \frac{4!}{4} = 3! = 6.$$

Observação

Com raciocínio análogo ao anterior, podemos calcular o número de permutações circulares de $n (n \geqslant 2)$ elementos da seguinte forma:

1) existem $n!$ permutações dos n elementos;
2) existem x *permutações circulares* onde a cada uma correspondem n permutações.

Logo $n \cdot x = n! \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$

que é o número de permutações circulares de n elementos.

E.64 De quantas formas 12 crianças podem formar uma roda?

E.65 Quantos colares podemos formar usando quatro contas, todas diferentes?

E.66 Temos m meninos e m meninas. De quantas formas eles podem formar uma roda, de modo que os meninos e as meninas se alternem?

Sugestão: suponha $m = 3$ e forme primeiro a roda só com meninos. Depois que o leitor "sentir" o problema para $m = 3$, deve resolver para m qualquer.

E.67 Mostre que:

1) $5! + 7! \neq 12!$
2) $8! - 3! \neq 5!$
3) $2 \cdot (5!) \neq (2 \cdot 5)!$

E.68 Resolva a equação: $A_{n,4} = 12 \cdot A_{n,2}$.

Solução

Observemos que a equação só tem solução para $n \geqslant 4$.

Temos:

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 12 \cdot n \cdot (n-1)$.

Como $n(n-1) \neq 0$ resulta:

$(n-2)(n-3) = 12$

$n^2 - 5n + 6 = 12$

$n^2 - 5n - 6 = 0 \begin{cases} 6 \\ -1 \text{ (não convém)} \end{cases}$

o conjunto solução é $\{6\}$.

E.69 Obter m sabendo-se que: $\frac{A_{m,3}}{A_{m,2}} = 4$.

E.70 Resolver a equação: $A_{m,3} = 30\,m$.

E.71 Obter m na equação $(m+2)! = 72 \cdot m!$

E.72 Prove que, $\forall\, n \in N$ com $n \geqslant 2$, $n! - (n-2)! = (n^2 - n - 1)(n-2)!$

E.73 Prove que:

a) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$

b) $(m!)^2 = [(m+1)! - m!] \cdot (m-1)!$

E.74 Exprimir mediante fatoriais $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n)$.

Solução

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n) =$

$= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{\text{n fatores}} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) = 2^n \cdot n!$

E.75 Exprimir mediante fatoriais:

a) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

b) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2$.

E.76 Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Sugestão: desenvolva a somatória e use a identidade:

$$\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} = \frac{i}{(i+1)!}$$

E.77 Mostre que:

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

E.78 Mostre que: $\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!}$ é um quadrado perfeito.

VIII. COMBINAÇÕES

30. Seja M um conjunto com *m* elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de combinações dos *m* elementos, tomados *r* a *r*, aos subconjuntos de M constituídos de *r* elementos.

31. Exemplo

$M = \{a, b, c, d\}$.

As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

$\{a, b\}$ $\{b, c\}$ $\{c, d\}$

$\{a, c\}$ $\{b, d\}$

$\{a, d\}$

32. Notemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$ pois, conforme definimos, combinação é um conjunto, portanto *não depende da ordem dos elementos.*

É importante notar a diferença entre uma combinação (conjunto) e uma seqüência, pois numa combinação *não importa a ordem dos elementos*, ao passo que numa seqüência *importa a ordem dos elementos*.

A própria natureza do problema a ser resolvido nos dirá se os agrupamentos a serem formados dependem ou não da ordem em que figuram os elementos.

33. Cálculo do Número de Combinações

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e indiquemos por $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos *m* elementos tomados *r* a *r*.

Tomemos uma combinação, digamos esta; $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$. Se permutarmos os elementos de E_1, obteremos $r!$ arranjos.

Se tomarmos outra combinação, digamos $E_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}\}$, permutando os elementos de E_2, obteremos outros $r!$ arranjos.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, $x = C_{m,r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos m elementos tomados *r* a *r*. São elas:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_x.$$

Cada combinação E_i dá origem a r! arranjos. Chamemos de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i.

Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ E_2 & \longrightarrow & F_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_x & \longrightarrow & F_x. \end{array}$$

Verifiquemos que:

(I) $F_i \cap F_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(II) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x = F$ onde F é o número de arranjos dos *m* elementos de M tomados *r* a *r*.

Temos:

(I) Se $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ (para $i \neq j$) então existiria um arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com E_i e E_j e portanto $E_i = E_j$. Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações, $E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

Logo $F_i \cap F_j = \varnothing$.

(II) Para provarmos que $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F$, provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x \subset F \text{ e} \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x. \end{cases}$$

a) Seja a um arranjo tal que

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x,$$

então $a \in F_i$ (para algum $i \in \{1, 2, \ldots x\}$) e evidentemente $a \in F$, logo

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_x \subset F.$$

b) Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a obteremos uma das combinações, digamos E_i. Ora como E_i gera o conjunto dos arranjos F_i, então $a \in F_i$ e, portanto,

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_i \cup \ldots \cup F_x.$$

Então:

$$F \subset F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x.$$

De (a) a (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x = F.$$

Sabemos ainda que se *x* conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um.

Isto é,

$$\#(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_x) = \#F \implies \#F_1 + \#F_2 + \ldots + \#F_x = \#F$$

$$r! + r! + \ldots r! = \frac{m!}{(m-r)!} \implies x \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

Logo

$$\boxed{x = \frac{m!}{(m-r)!\,r!}}.$$

Como *x* indica $C_{m,r}$ (ou $\binom{m}{r}$) temos a fórmula do número de combinações:

$$\boxed{C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}} \quad \forall\, m, r \in \mathbb{N}^*,\ r < m$$

34. Casos particulares

1º caso: $m, r \in \mathbb{N}^*$ e $r = m$

$$\begin{cases} C_{m,m} = 1 \\ \dfrac{m!}{m!(m-m)!} = 1 \end{cases}$$

2º caso: $m \in \mathbb{N}^*$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{m,0} = 1 \quad \text{(o único subconjunto com 0 elementos é o vazio)} \\ \dfrac{m!}{0!(m-0)!} = 1 \end{cases}$$

3º caso: $m = 0$ e $r = 0$

$$\begin{cases} C_{0,0} = 1 \quad \text{(o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio vazio)} \\ \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1 \end{cases}$$

Em virtude da análise dos casos particulares, concluímos que a fórmula

$$\boxed{C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}}$$

é válida $\forall\, m, r \in \mathbb{N}$ com $r \leqslant m$.

35. Exemplos

1º) Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Notemos que cada comissão é um subconjunto de três elementos (pois dentro de cada comissão não importa a ordem dos elementos). Logo o número de comissões é:

$$\binom{10}{3} = C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120.$$

2º) Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os sete existentes. De quantas formas isto pode ser feito?

Cada escolha de 4 lugares corresponde a uma combinação dos 7 elementos, tomados 4 a 4, pois a ordem dos números escolhidos não interessa, (escolher os lugares 1, 2, 4, 7 é o mesmo que escolher os lugares 7, 2, 4, 1). Logo o resultado procurado é

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

EXERCÍCIOS

E.79 Calcule os números:

a) $\binom{6}{2}$ b) $\binom{6}{4}$ c) $\binom{8}{0}$

E.80 Obter todas as combinações dos elementos de $M = \{7, 8, 9, 0\}$ tomados dois a dois.

E.81 (FAM) Sabendo-se que $\frac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2$, determine o valor de p.

E.82 (EEM) Calcule p, sabendo-se que $A_{m,p} = C_{m,p}$ $\forall$ m e $0 \leqslant p < m$.

E.83 (EPUC) Calcule $A_{m,3}$ sabendo-se que $C_{m,3} = 84$.

E.84 Prove que o produto de *m* fatores inteiros positivos e consecutivos é divisível por m!

(*Sugestão*: procure relacionar o produto dado, com alguma fórmula conhecida).

E.85 Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução

Notemos que a ordem em que o aluno escolher as 10 questões não interessa. Por exemplo resolver as questões:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 é o mesmo que resolver as questões: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Logo, cada maneira de escolher 10 questões é uma combinação das 15 questões tomadas 10 a 10, isto é,

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3\,003.$$

E.86 De um baralho de 52 cartas, são extraídas 4 cartas sucessivamente e sem reposição. Qual o número de resultados possíveis, se não levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

E.87 Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?

E.88 Quantos produtos podemos obter se tomarmos 3 fatores distintos escolhidos entre 2, 3, 5, 7 e 11?

E.89 Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de no mínimo 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis?

E.90 De quantos modos podemos escolher 5 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem das mesmas, de modo que sempre compareçam os 4 ases?

E.91 De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

Solução

Como não levamos em conta a ordem das cartas, cada escolha é uma combinação. O número total de combinações é $\binom{52}{4}$. O número de combinações onde não comparece o rei é $\binom{48}{4}$. Logo a diferença $\binom{52}{4} - \binom{48}{4}$ é o número de combinações onde comparece ao menos um rei.

E.92 Existem 10 jogadores de Futebol de salão, entre eles João, que por sinal é o único que joga como goleiro. Nestas condições, quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

E.93 Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 10 jogadores (entre eles Ari e Arnaldo). De quantas formas isto pode ser feito, se Ari e Arnaldo devem necessariamente ser escalados?

E.94 (MAPOFEI–76) Um químico possui 10 (dez) tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 (seis) dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

E.95 Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 Matemáticos. De quantas formas podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:

a) nenhum membro seja Matemático,
b) todos os Matemáticos participem da comissão?
c) haja exatamente um Matemático na comissão?
d) pelo menos um membro da comissão seja Matemático?

E.96 De um grupo de 10 pessoas deseja-se formar uma comissão com 5 membros. De quantas formas isto pode ser feito se duas pessoas (A e B) ou fazem parte da comissão, ou não?

E.97 Um homem possui 8 pares de meias (todos distintos). De quantas formas ele pode selecionar 2 meias, sem que élas sejam do mesmo par?

E.98 Temos 10 homens e 10 mulheres. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar se em cada uma deve haver 3 homens e 2 mulheres?

Solução

Podemos escolher 3 homens entre 10 de $\binom{10}{3} = 120$ formas e podemos escolher 2 mulheres entre 10 de $\binom{10}{2} = 45$ formas.

Cada grupo de 3 homens pode se juntar com um dos 45 grupos de mulheres, formando uma comissão. Como existem 120 grupos de homens, teremos ao todo $120 \cdot 45 = 5\,400$ comissões.

E.99 Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas:

a) podemos formar uma comissão de 3 pessoas?
b) podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que haja 2 homens e uma mulher, na mesma?

E.100 Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extraindo-se 8 peças (sem reposição), não levando em conta a ordem das mesmas, de quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

E.101 (ITA) Em uma urna existem 12 bolas das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais 2 são brancas?

E.102 (EESCUSP-66) Quantos subconjuntos de 5 cartas contendo exatamente 3 ases podem ser formados de um baralho de 52 cartas?

E.103 Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. De quantas formas podemos extrair 2 bolas, sem reposição e sem levar em conta a ordem na extração, de modo que:

a) as duas sejam vermelhas?
b) as duas sejam brancas?
c) uma seja vermelha, outra branca?

E.104 (MAPOFEI-74) Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 sejam pretas?

E.105 (MAPOFEI-74) A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

E.106 Em um grupo de 15 pessoas existem 5 médicos, 7 engenheiros e 3 advogados. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar, cada qual constituída de 2 médicos, 2 engenheiros e 1 advogado?

E.107 Existem 5 pontos, entre os quais não existem 3 colineares. Quantas retas eles determinam?

E.108 Num plano existem 20 pontos dos quais 3 nunca são colineares, exceto 6 que estão sobre uma mesma reta. Encontre o número de retas que esses pontos determinam.

E.109 Numa circunferência são tomados 8 pontos distintos.

a) Ligando-se 2 desses pontos, quantas cordas podem ser traçadas?
b) Ligando-se 3 desses pontos, quantos triângulos podem ser formados?
c) Ligando-se 6 desses pontos, quantos hexágonos podem ser formados?

E.110 Quantas diagonais, tem um polígono regular de n lados?

Solução

O polígono tem n vértices: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Cada segmento é determinado por um par não ordenado de dois vértices ($\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_1}$, por exemplo).

O número total de segmentos determinados será então $\binom{n}{2}$. Entre esses segmentos estão incluídos os lados e as diagonais. Como existem n lados, o número de diagonais será:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!\,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

E.111 Quantas diagonais, não das faces, tem:

a) um cubo? b) um octaedro?

E.112 (EPUSP) Sabe-se que o número total de vértices de um dodecaedro regular é 20 e que as faces são pentágonos. Quantas retas ligam dois vértices do dodecaedro, não pertencentes a mesma face?

E.113 (EPUSP-61) Quantas diagonais, não das faces, tem um prisma cuja base é um polígono de n lados?

E.114 No espaço existem 7 pontos, onde não existem 4 pontos coplanares. Quantos planos eles determinam?

E.115 No espaço existem n pontos, entre os quais não existem 4 coplanares com exceção de 5 que estão num mesmo plano. Quantos planos os n pontos determinam?

E.116 (EPUSP) Num plano são dados 19 pontos, entre os quais não se encontram 3 alinhados, nem 4 situados sobre uma mesma circunferência. Fora do plano, é dado mais um ponto. Quantas superfícies esféricas existem, cada uma passando por 4 dos 20 pontos dados?

E.117 (MAPOFEI-75) São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em três quaisquer dos 12 pontos?

Solução

Cada combinação de 3 pontos, entre os 12 existentes, dá origem a um triângulo, com exceção das combinações de 3 pontos, tomados entre os 5 alinhados; logo o número de triângulos que podem ser formados é:

$$\binom{12}{3} - \binom{5}{3} = 210.$$

E.118 São dadas 2 retas paralelas. Marcam-se 10 pontos distintos sobre uma e 8 pontos distintos sobre a outra. Quantos triângulos podemos formar ligando 3 quaisquer desses 18 pontos?

E.119 (MAPOFEI-73) Seja P o conjunto dos pontos de p retas ($p \geqslant 2$), duas a duas paralelas, de um plano. Seja Q o conjunto dos pontos de q($q \geqslant 2$) retas, duas a duas paralelas do mesmo plano, concorrentes com as p primeiras. Calcule o número total de paralelogramos de vértices pertencentes ao conjunto $P \cap Q$ e de lados contidos no conjunto $P \cup Q$.

E.120 Com as letras a, e, i, o, b, c, d, f, g quantas palavras (com ou sem sentido) de 6 letras distintas podem ser formadas,usando-se 3 vogais e 3 consoantes?

E.121 (EPUSP-65) De quantas maneiras diferentes pode-se colocar os 4 cavalos de um jogo de xadrez (2 brancos iguais e 2 pretos iguais) no tabuleiro do mesmo jogo (64 casas)?

E.122 Obter o número de maneiras que nove 0's e seis 1's podem ser colocados em seqüência de modo que dois 1's não compareçam juntos.

Solução

– 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 –

Dispostos os nove zeros; existem 10 posições que os 1's podem ocupar (ver figura acima).

Como existem 6 1's precisamos escolher 6 lugares entre os 10 existentes. Isto pode ser feito de $\binom{10}{6} = 210$ modos.

E.123 De quantas formas podemos alinhar em seqüência p sinais "+" e q sinais "-" de modo que 2 sinais "-" nunca fiquem juntos?

(Observação: é dado que $p + 1 \geqslant q$).

IX. PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

36. Consideremos a palavra ANA e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por A* o segundo A. Teremos então:

ANA*,	A A* N,	N A A*,	N A* A,	A* N A,	A* A N
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Notemos que as permutações:

(1) e (5) são iguais
(2) e (6) são iguais
(3) e (4) são iguais.

Na verdade não temos 3! = 6 permutações distintas,mas apenas 3 que são:

ANA, AAN, N A A.

Esta diminuição do número de permutações decorreu do fato de termos duas letras iguais A e A no conjunto das letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acarreta uma diminuição do número de permutações, em relação ao número que teríamos, se todas fossem distintas.

37. Vamos calcular o número de permutações que podemos formar quando alguns elementos a serem permutados são iguais.

1º caso

Consideremos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1.

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nestas condições e calculemos esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma n'upla ordenada de elementos onde devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos

$$\underbrace{(-,-,-,\ldots,-)}_{n \text{ elementos}}$$

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação vamos escolher $n - n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1. Existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de esçolher estas posições.

Para cada escolha de $(n - n_1)$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados. Logo existem ao todo

$$\binom{n}{n-n_1} \cdot (n-n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$$

formas de dispormos os elementos distintos de a_1, na permutação.

Uma vez colocados estes elementos distintos, a posição dos elementos rep tidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1. Isto é:

$$\boxed{P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.}$$

Exemplo

Quantos anagramas existem da palavra P A R A G U A I?

Temos $\begin{cases} A, A, A \rightarrow \text{elementos repetidos} \\ P \\ R \\ G \\ U \\ I \end{cases}$

$n = 8$ e $n_1 = 3$, logo $P_8^3 = \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720.$

2º caso

Consideremos n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1: $\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}$

n_2 são iguais a a_2: $\underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}$

e os restantes, são todos distintos entre si e distintos de a_1 e de a_2. Indiquemos por $P_n^{n_1, n_2}$ o número de permutações, nestas condições.

Cada permutação dos n elementos é uma o n'upla ordenada de elementos onde devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $n - n_1 - n_2$ elementos restantes.

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_2$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_2. Existem $\binom{n}{n - n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n - n_2$ elementos podem ser permutados (lembremos que, dos elementos agora a serem permutados, existem n_1 iguais a a_1). Ao todo existirão

$$\binom{n}{n - n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n - n_2)!\, n_2!} \cdot \frac{(n - n_2)!}{n_1!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$$

formas de arranjar na permutação, todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjados estes elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo existirão $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2. Isto é:

$$P_n^{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!}$$

38. Exemplos

1º) Quantos anagramas existem da palavra ANALÍTICA?

Temos $\begin{cases} A, A, A \longrightarrow \text{elementos repetidos} \\ I, I \longrightarrow \text{elementos repetidos} \\ N \\ L \\ T \\ C \end{cases}$

$n = 9$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$.

Logo:

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!\, 2!} = 30\,240.$$

2º) Existem 6 bandeiras (de mesmo formato), sendo 3 vermelhas e 3 brancas. Dispondo-as ordenadamente num mastro, quantos sinais diferentes podem ser emitidos com elas?

Temos:

Cada sinal emitido consta de uma permutação de 6 bandeiras sendo 3 iguais a V (vermelho) e 3 iguais a B (brancas).

Isto é, $n = 6$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$.

Portanto, existem:

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\, 3!} = 20 \text{ sinais.}$$

39. Caso Geral

Consideremos n elementos dos quais:

n_1 são iguais a a_1
n_2 são iguais a a_2
⋮
n_r são iguais a a_r.

Usando raciocínio análogo ao do 1º caso e 2º caso poderemos calcular o número de permutações nestas condições (indicado por $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ através da fórmula:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

É fácil ver que no caso particular de $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 1$ obteremos:

$$P_n^{1, 1, \ldots, 1} = n!$$

que é o número de permutações de n elementos distintos.

EXERCÍCIOS

E.124 De quantas formas 8 sinais "+" e 4 sinais "−" podem ser colocados em uma seqüência?

E.125 Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 2, 2, 3, 3, 3, 5?

E.126 Quantos anagramas existem da palavra AMARILIS?

E.127 Se uma pessoa gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra ESTATÍSTICA, quanto tempo levará para escrever todos, se não deve parar nenhum instante para descansar?

E.128 Uma moeda é lançada 20 vezes. Quantas seqüências de caras e coroas existem, com 10 caras e 10 coroas?

E.129 Quantos números de 7 algarismos existem nos quais comparecem uma só vez os algarismos 3, 4, 5 e quatro vezes o algarismo 9?

E.130 Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas seqüências de cores podemos observar?

E.131 Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal, como mostra a figura. Ele só pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Quantas trajetórias (caminhos) existem da origem ao ponto P(7, 5)?

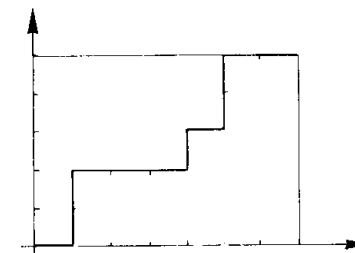
Solução

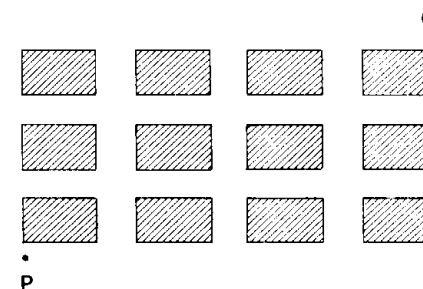
Notemos inicialmente que o homem terá que dar ao todo, $7 + 5 = 12$ passos (7 para leste (L) e 5 para norte (N).

Cada trajetória possível é, então, uma seqüência de 12 elementos, sendo 7 L's e 5 N's.

A trajetória da figura é:

(L, N, N, L, L, L, N, L, N, N, L, L).

Se quisermos o número de trajetórias teremos que calcular então o número de permutações com repetição de 12 elementos, sendo 7 L's e 5 N's. Portanto, o número de trajetórias é:

$$P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7!\,5!} = 792.$$

E.132 Uma cidade é formada por 12 quarteirões dispostos segundo a figura abaixo. Uma pessoa sai do ponto P e dirige-se para o ponto Q pelo caminho mais curto, isto é movendo-se da esquerda para direita, ou de baixo para cima. Nestas condições, quantos caminhos diferentes ele poderá fazer, se existem 2 ruas "horizontais" e 3 "verticais"?

E.133 Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode dar um passo de cada vez, para norte (N) ou para leste (L). Partindo da origem e passando pelo ponto A(3, 1), quantas trajetórias existem até o ponto B(5, 4)?

E.134 Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 de quantas formas podemos permutá-los de modo que os números ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

E.135 Uma classe tem a meninas e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em fila se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso, e os meninos também? (Supor que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso).

X. COMPLEMENTOS

A – Partições ordenadas

40. Consideremos um conjunto A e K subconjuntos de A não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_K$ tais que:

a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ (para $i \neq j$)

b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_K = A$

Chamaremos de uma partição ordenada do conjunto A, à seqüência de conjuntos

$$(A_1, A_2, \ldots, A_K).$$

41. Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideremos as seqüências de conjuntos

1) $(\{1, 2\}; \{3, 4\}; \{5, 6\})$
2) $(\{1, 2, 3, 4\}; \{5\}; \{6\})$
3) $(\varnothing; \{1, 2, 3, 4\}; \{5, 6\})$
4) $(\{1, 2, 3\}; \{3, 4, 5\}; \{6\})$
5) $(\{1, 2\}; \{3, 4, 5\})$.

Nos exemplos (1) e (2) temos partições ordenadas de A, ao passo que em (3) não temos pois $\varnothing$ faz parte da seqüência. Em (4) não temos uma partição ordenada pois $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} \neq \varnothing$ e finalmente em (5), $\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \neq A$.

Observemos que, a partição ordenada $(\{1, 2\}; \{3, 4\}; \{5, 6\})$ é diferente da partição ordenada $(\{5, 6\}; \{3, 4\}; \{1, 2\})$ pois cada partição, sendo uma seqüência de conjuntos, *depende da ordem dos mesmos.*

42. Podemos resolver alguns problemas combinatórios com auxílio do conceito de partição ordenada.

Exemplo

De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas em três salas A, B e C de modo que em A fiquem 4 pessoas, em B fiquem 3 pessoas e em C também 3 pessoas?

Notemos que cada modo de distribuir as 10 pessoas corresponde a uma partição ordenada das mesmas do tipo:

$$(\{-, -, -, -\}; \{-, -, -\}; \{-, -, -\})$$

↑ pessoas na sala A — ↑ pessoas na sala B — ↑ pessoas na sala C

Para calcularmos o número de partições ordenadas, façamos o seguinte raciocínio:

Escolhemos 4 entre 10 pessoas para ficarem em A. Isto pode ser feito de $\binom{10}{4}$ maneiras.

Em seguida, entre as 6 pessoas restantes, escolhemos 3, para ficarem em B. Isto pode ser feito de $\binom{6}{3}$ maneiras.

As 3 pessoas restantes, podem ser escolhidas de $\binom{3}{3} = 1$ maneira (isto é, as pessoas da sala C ficam determinadas).

Ora, cada combinação de pessoas em A, gera $\binom{6}{3}$ maneiras de dispor 3 pessoas em B.

Logo, o número total de partições é:

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{10!}{6!\,4!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = 4\,200$$

Isto é, existem 4 200 modos de dispormos as 10 pessoas nas 3 salas.

B – Partições não ordenadas

43. Consideremos um conjunto A e K subconjuntos de A não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que:

a) $A_i \cap A_j = \varnothing$ (para $i \neq j$)

b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

Chamaremos de uma partição não ordenada de A à família:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}.$$

44. Exemplo

Seja o conjunto: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideremos as famílias:

1) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$	é uma partição.
2) $\{\{1, 2\}; \{3, 4, 5, 6\}\}$	é uma partição.
3) $\{\{1, 2\}; \{3\}\}$	não é uma partição.
4) $\{\{1, 2, 3, 4\}; \{3, 4, 5, 6\}\}$	não é uma partição.

45. Alguns problemas combinatórios podem ser resolvidos com este conceito.

Exemplo

De quantos modos 12 pessoas podem ser repartidas em 3 grupos, tendo cada grupo, 4 pessoas?

Consideremos para fixar idéias 3 grupos A_1, A_2 e A_3.

Notemos que a ordem em que figuram pode ser qualquer que teremos a *mesma* distribuição em 3 grupos. Estamos então interessados no número de partições não ordenadas do tipo:

$$\{\{-,-,-,-\};\{-,-,-,-\};\{-,-,-,-\}\}$$

↑ grupo A_1 ↑ grupo A_2 ↑ grupo A_3

Para calcularmos o número de partições não ordenadas, façamos o seguinte raciocínio.

1º) Calculamos o número de partições ordenadas

$$(\{-,-,-,-\};\{-,-,-,-\};\{-,-,-,-\})$$

que com o raciocínio do exemplo anterior sabemos ser:

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34\,650.$$

2º) Cada grupo de $3! = 6$ partições ordenadas dá origem à mesma partição não ordenada.

3º) Logo o número de partições não ordenadas será:

$$\frac{34\,650}{6} = 5\,775.$$

46. Consideremos a equação linear $x + y = 7$ e encontremos o número de soluções inteiras não negativas da mesma.

Por tentativas, encontramos:

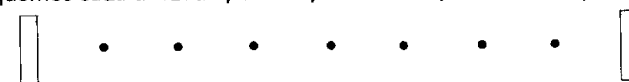
(0, 7); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0).

Ao todo temos 8 soluções inteiras não negativas.

47. Agora, se tivermos a equação $x + y + z = 7$, resolvendo por tentativas o trabalho será muito grande, e corremos o risco de "esquecer" alguma solução.

Um raciocínio alternativo, seria o seguinte:

Temos que dividir 7 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero.

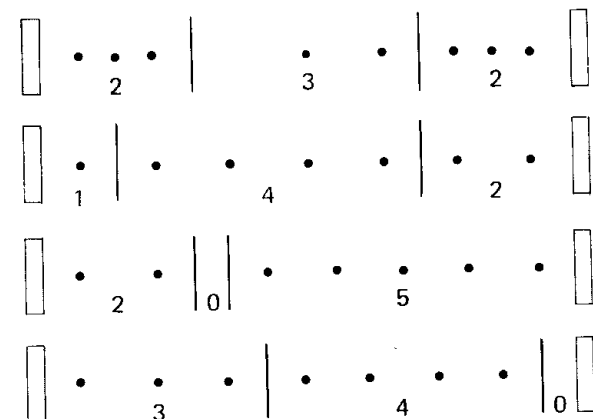
Indiquemos cada unidade por um ponto então, elas serão representadas por

Como queremos dividir as 7 unidades em 3 partes, vamos usar duas barras para fazer a separação.

Cada modo de dispormos os pontos e as barras dará origem a uma solução. Por exemplo:

2 | 3 | 2

1 | 4 | 2

2 | 0 | 5

3 | 4 | 0

Ora, como temos 9 símbolos $\begin{cases} 7\ \bullet \\ \text{e} \\ 2\ | \end{cases}$

O número de permutações destes símbolos será:

$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36.$$

que é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 7$.

Tal raciocínio pode ser generalizado pelo:

48. Teorema

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ é

$$\frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n - 1)!}$$

Demonstração

De fato, cada solução da equação é uma permutação de r símbolos ● e $(n - 1)$ símbolos | (precisamos de $(n - 1)$ barras para dividir r pontos em n partes).

O número de permutações (soluções da equação) será:

$$P_{n+r-1}^{(n-1),r} = \frac{(n + r - 1)!}{r!\,(n - 1)!}$$

49. Exemplo de Aplicação

Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: GUARANÁ, SODA e TÔNICA. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

Seja:

x o número de garrafas de guaraná
y o número de garrafas de soda
z o número de garrafas de tônica

É claro que $x, y, z \in \mathbb{N}$ e $x + y + z = 5$.

Trata-se então de achar o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x + y + z = 5$$

que é então: $\dfrac{(5 + 3 - 1)!}{5!\,(3 - 1)!} = \dfrac{7!}{5!\,2!} = 21.$

EXERCÍCIOS

E.136 De quantas formas 12 estudantes podem ser divididos e colocados em 3 salas, sendo 4 na primeira, 5 na segunda e 3 na terceira?

E.137 Um grupo de 10 viajantes para para dormir num hotel. Só havia 2 quartos com 5 lugares cada um. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

E.138 (MACK-70) De quantos modos 8 pessoas podem ocupar duas salas distintas, devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas?

E.139 Um baralho tem 52 cartas. De quantos modos podemos distribuí-las entre 4 jogadores, de modo que cada um receba 13 cartas?

E.140 De quantas formas 20 alunos podem ser colocados em 4 classes A, B, C, D ficando 5 alunos por classe?

E.141 De quantas formas podemos distribuir 10 bolinhas, numeradas de 1 a 10 em 2 urnas A e B (podendo eventualmente uma ficar vazia)?

E.142 De quantas formas podemos repartir 9 pessoas em 3 grupos, ficando 3 pessoas em cada grupo?

E.143 Com 10 pessoas, de quantas formas podemos formar dois times de bola ao cesto?

E.144 De quantas formas 15 pessoas podem ser divididas em 3 times, com 5 pessoas por time?

E.145 Quantas soluções inteiras não negativas têm as equações:

a) $x + y + z = 6$
b) $x + y + z + t = 10$
c) $x + y + z + t + w = 10$

E.146 Quantas soluções inteiras tem a equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ se cada x_i é tal que $x_i \geqslant 3\ \forall\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

E.147 Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?

E.148 Uma mercearia tem em seu estoque, pacotes de café de 6 marcas diferentes. Uma pessoa deseja comprar 8 pacotes de café. De quantas formas pode fazê-lo?

E.149 Uma confeitaria vende 5 tipos de doces. Uma pessoa, deseja comprar 3 doces. De quantas formas isto pode ser feito?

E.150 Temos duas urnas A e B. De quantas formas podemos colocar 5 bolas indistingüíveis, podendo eventualmente uma das urnas ficar vazia?

Nem só de Física vive um gênio

Isaac Newton nasceu no interior da Inglaterra tendo estudado no Trinity College em Cambridge.

Interessava-se muito por Química mas depois de estudar as obras de importantes matemáticos como Euclides, Oughtred, Kleper, Viéte, Wallis, Galileu, Fermat e Huygens, adquiriu grande conhecimento matemático.

Por ocasião da peste, voltou para casa pois o colégio foi fechado e neste período fez suas principais descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores.

O teorema binomial foi enunciado pela primeira vez numa carta enviada a Oldenburg, destinada a Leibniz e, a partir daí, os processos infinitos seriam amplamente usados.

Em 1669 publicou *"De analysi per aequationes numero terminorum infinitas"* (Análise por meio de equações infinitas quanto ao número de termos), onde expôs sua principal descoberta em Matemática, o Cálculo e o método das séries infinitas.

Em 1642 lança o *"Methodus fluxiorum et serierium infinitorum"* (Método dos fluxos e séries infinitas), aproximando-se bastante dos conceitos de limites e derivadas, onde utiliza o sistema de coordenadas polares. *"Philosophiae naturalis principia mathematica"* (Princípios matemáticos da filosofia natural), neste mais admirável tratado científico de todos os tempos em 1687 Newton apresenta os fundamentos da Física e da Astronomia, dando preferência aos métodos geométricos sem hesitar, na utilização de seus métodos de Cálculo e séries infinitas. Nesta obra está incluída a maior formulação matemática conseguida por Newton que é a lei da gravitação $f = m \cdot a$.

Generalizando as leis de Galileu formulou "as leis do movimento de Newton" que, combinadas às de Kleper e Huygens, lhe deram oportunidades de enunciar o grande princípio unificador de que duas partículas quaisquer do Universo se atraem mutuamente com uma força que varia de modo inversamente proporcional à distância entre elas.

Graças a sua capacidade de manejar a Matemática é que este princípio foi aceito pelos homens de sua época, entretanto, 40 anos se passaram até que a teoria gravitacional de Newton derrubasse a cosmologia de Descartes.

Em 1672, Newton publicou seu *"Philosophical Transaction"* (Transação filosófica) onde anunciou aquilo que achava uma das mais estranhas obras da natureza, o fato de a luz branca ser uma simples combinação de raios de diferentes cores, com diferentes índices de refração, o que lhe custou muitas críticas e ataques.

No seu *"Opticks"* (Óptica), de 1704, usa pela primeira vez dois eixos sem hesitar quanto as coordenadas negativas.

Ainda uma obra de Newton deve ser lembrada, a *"Arithmetica universalis"* (Aritmética Universal), com muitas contribuições matemáticas importantes.

Famoso, representou Cambridge no Parlamento Britânico e foi eleito presidente do Royal Society, cargo que ocupou até o fim da vida, recebendo o título de nobreza da Rainha Anne.

Em 1695, para grande desgosto de Newton, Wallis lhe comunica que na Holanda o Cálculo é considerado descoberta de Leibniz, isto acarretou inúmeros fatos desagradáveis mas provou-se que Newton foi o percursor.

Ao morrer, Newton foi enterrado na Abadia de Westminister com as pompas de um rei.

CAPÍTULO II

BINÔMIO DE NEWTON

I. INTRODUÇÃO

50. Vamos usar as técnicas que estudamos em Análise Combinatória para ter um resultado importante em Álgebra, que consiste em obter o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$.

Já nos são familiares os casos particulares:

$(x + a)^0 = 1$
$(x + a)^1 = x + a$
$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$.

Para todo n inteiro, positivo, podemos calcular:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n \text{ fatores}}$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação.

51. O procedimento é o seguinte

1º) De cada fator $(x + a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser *x* ou *a*, multiplicando-os em seguida.

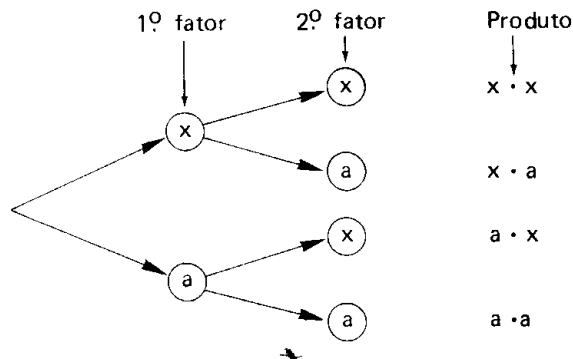
2º) Continuamos o processo até esgotar todas as seleções possíveis de um termo de cada fator.

3º) Tomamos todos os produtos obtidos e calculamos sua soma (que consiste em reduzir os termos semelhantes).

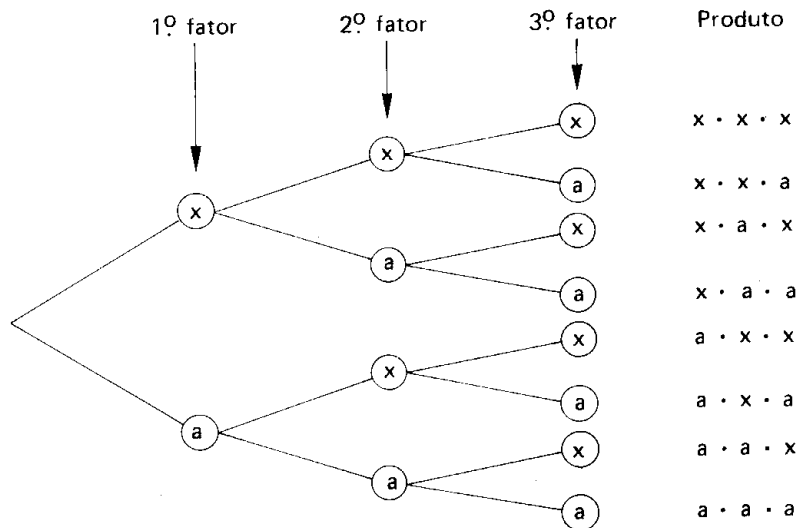
4º) Essa soma obtida é o resultado do desenvolvimento de $(x + a)^n$.

52. Exemplo 1

$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a)$

Usamos o diagrama da árvore para as seleções dos termos

Soma: $x \cdot x + x \cdot a + a \cdot x + a \cdot a = x + 2ax + a^2$.
Portanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

53. Exemplo 2

$(x + a)^3 = (x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a)$.

Soma: $x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot a + x \cdot a \cdot x + x \cdot a \cdot a + a \cdot x \cdot x + a \cdot x \cdot a +$
$+ a \cdot a \cdot x + a \cdot a \cdot a = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$.

Portanto,

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3.$$

54. O problema que surge é o seguinte. Será que podemos obter os termos do desenvolvimento de $(x + a)^n$ sem recorrermos ao diagrama da árvore?

A resposta é positiva; vamos mostrar como isto é possível, através de um exemplo particular, e em seguida vamos generalizar o resultado obtido.

Exemplo

$(x + a)^3 = (x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a)$.

Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos, que devem ser multiplicados entre si.

Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3; $x^2 \cdot a$; $x \cdot a^2$; a^3.

Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo.

1º) x^3

Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$, que é escolhendo somente o termo "x" de cada fator. Logo o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$.

2º) $x^2 \cdot a$

A quantidade de produtos do tipo $x^2 \cdot a$ é igual ao número de seqüências de três letras onde duas são iguais a "x" e uma igual a "a". Isto é:

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{1}.$$

Logo o coeficiente de $x^2 \cdot a$ é $\binom{3}{1}$.

3º) $x \cdot a^2$

A quantidade de produtos do tipo $x \cdot a^2$ é igual ao número de seqüências de três letras onde uma é igual a "x" e duas são iguais a "a". Isto é,

$$P_3^{1,2} = \frac{3!}{1!\,2!} = \binom{3}{2}.$$

Logo o coeficiente de $x \cdot a^2$ é $\binom{3}{2}$.

4º) a^3

Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$ que é escolhendo somente o termo "a" de cada fator. Logo, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento do binômio é:

$$1 \text{ ou } \binom{3}{3}.$$

Em resumo:

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^2 \cdot a + \binom{3}{2} \cdot x \cdot a^2 + \binom{3}{3} \cdot a^3.$$

II. TEOREMA BINOMIAL

O desenvolvimento de $(x + a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Demonstração

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \ldots \cdot (x + a)}_{n}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicaçao e tendo em vista os exemplos precedentes, concluímos que os diferentes tipos de termos que podem ser obtidos na multiplicação, serão:

$$x^n;\ x^{n-1} \cdot a;\ x^{n-2} \cdot a^2;\ \ldots;\ x^{n-p} \cdot a^p;\ \ldots;\ a^n.$$

Vejamos agora a quantidade de cada um desses diferentes tipos de termos.

1º) x^n

O produto x^n só pode ocorrer de uma forma: $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fatores}}$ e portanto o coeficiente de x^n é 1 ou $\binom{n}{0}$.

2º) $x^{n-1} \cdot a$

O produto $x^{n-1} \cdot a$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n - 1)$ letras "x" e uma letra "a". Isto é:

$$P_n^{n-1,1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \binom{n}{1}.$$

Portanto o coeficiente de $x^{n-1} \cdot a$ é $\binom{n}{1}$.

3º) $x^{n-2} \cdot a^2$

O produto $x^{n-2} \cdot a^2$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n - 2)$ letras "x" e duas letras "a". Isto é:

$$P_n^{n-2,2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \binom{n}{2}.$$

Portanto o coeficinete de $x^{n-2} \cdot a$ é $\binom{n}{2}$.

4º) $x^{n-p} \cdot a^p$

Genericamente, o produto $x^{n-p} \cdot a^p$ pode ocorrer de tantas formas quantas podemos permutar $(n - p)$ letras "x" e p letras "a". Isto é:

$$P_n^{n-p,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}.$$

Portanto o coeficiente de $x^{n-p} \cdot a^p$ é: $\binom{n}{p}$.

5º) a^n

Finalmente, o produto a^n só pode ocorrer de uma forma, que é

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Portanto o coeficiente de a^n é 1 ou $\binom{n}{n}$.

Das considerações feitas acima, concluímos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n.$$

que é o que queríamos demonstrar.

55. Exemplo

Desenvolver $(3x^2 + a)^4$.

Temos:

$$(3x^2 + a)^4 = \binom{4}{0} \cdot (3x^2)^4 + \binom{4}{1} \cdot (3x^2)^3 \cdot a^1 + \binom{4}{2} \cdot (3x^2)^2 \cdot a^2 + \binom{4}{3} \cdot (3x^2) \cdot a^3 + \binom{4}{4} \cdot a^4.$$

$$(3x^2 + a)^4 = 81x^8 + 108x^6a + 54x^4a^2 + 12x^2a^3 + a^4.$$

EXERCÍCIOS

E.151 Desenvolver, usando o teorema binomial:

a) $(x + 3b)^3$
b) $(1 - x^2)^5$
c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$
d) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^4$
e) $(3 - y)^5$

E.152 Desenvolver, usando o teorema binomial

$$(m + \frac{1}{m})^5 - (m - \frac{1}{m})^5.$$

E.153 Desenvolver $(x + a)^7$.

E.154 (MAPOFEI-75) Calcular a e b sabendo-se que $(a + b)^3 = 64$ e que

$$a^5 - \binom{5}{1}a^4 \cdot b + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 - \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4}ab^4 - b^5 = -32.$$

E.155 Quantos termos tem o desenvolvimento de:

a) $(x + y)^7$? b) $(x + y)^{10}$? c) $(x + y)^n$?

E.156 a) Quantos termos tem o desenvolvimento de $(x + a)^{50}$?

b) Escrever os 4 primeiros termos, sem os coeficientes, em potências de expoentes decrescentes de x.

E.157 No desenvolvimento de $(x + y)^{1000}$, qual o centésimo termo, se o desenvolvimento for feito em potências de expoentes decrescentes de x?

E.158 Quais os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ segundo as potências de expoentes decrescentes de x?

III. OBSERVAÇÕES

56. Os números:

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \ldots; \binom{n}{p}; \ldots; \binom{n}{n}.$$

São chamados *coeficientes binomiais*. No coeficiente binomial $\binom{n}{p}$, n é chamado numerador e p, denominador.

57. O teorema binomial é válido para $(x - a)^n$ pois basta escrevermos: $(x - a)^n$ como $[x + (-a)]^n$ e aplicarmos o teorema.

Exemplo

$$(x - 2y)^4 = [x + (-2y)]^4 =$$

$$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}x^1 \cdot (-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4 =$$

$$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$$

58. Termo Geral

Já vimos que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot a + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p} \cdot a^p + \ldots + \binom{n}{n}a^n.$$

O termo:

$$\binom{n}{p}x^{n-p}\,a^p$$

é chamado geral, pois fazendo-se p = 0, 1, 2, ..., n obtemos todos os termos do desenvolvimento.

Notemos ainda que, ∀ p, a soma dos expoentes de *x* e *a* é sempre *n*. Além disso, o expoente de *x* é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial correspondente.

Exemplos

1º) No desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$ qual o coeficiente de x^8?

Temos:

O termo geral do desenvolvimento é: $\binom{6}{p}(x^2)^{6-p} \cdot 1^p = \binom{6}{p}x^{12-2p}$.

Como queremos o termo que possua x^8, devemos impor que $12 - 2p = 8$ isto é, $p = 2$.

Logo, o termo que possue x^8 é:

$$\binom{6}{2} \cdot (x^2)^4 = \binom{6}{2} \cdot x^8.$$

Seu coeficiente é: $\binom{6}{2} = 15$.

2º) Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^8$?

O termo geral é $\binom{8}{p} x^{8-p} \left(\frac{-1}{x}\right)^p =$

$= \binom{8}{p} x^{8-p} \cdot (-1)^p \cdot x^{-p} = \binom{8}{p} (-1)^p x^{8-2p}$.

Para que ele independa de x devemos ter $8 - 2p = 0$, isto é, $p = 4$.

Logo, o termo procurado é:

$$\binom{8}{4} (-1)^4 \cdot x^{8-2\cdot 4} = \binom{8}{4} = 70.$$

3º) Desenvolvendo $(x + y)^{10}$ em potências de expoentes decrescentes de x, qual é o 6º termo?

Notemos que:

o 1º termo conterá x^{10}
o 2º termo conterá x^9
. .
. .
o 6º termo conterá x^5.

Portanto o termo procurado é:

$$\binom{10}{5} x^5 \cdot y^5 = 252\, x^5 y^5.$$

Um outro modo de encontrarmos o termo desejado seria notar que, desenvolvendo o binômio em potências de expoentes decrescentes de x, os coeficientes seriam:

$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	....	$\binom{n}{p}$
↑	↑	↑		↑
1º termo	2º termo	3º termo		(p + 1) termo

E, como queremos o 6º termo, devemos tomar o coeficiente binomial $\binom{n}{5}$, que no nosso caso é $\binom{10}{5}$. Portanto o termo desejado é $\binom{10}{5} x^5 y^5 =$ $= 252\, x^5 y^5$.

EXERCÍCIOS

E.159 Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1 - 2x)^6$?

E.160 Desenvolvendo $(x + 3y)^9$, qual o termo que contém x^4?

E.161 No desenvolvimento de $(1 - 2x^2)^5$, qual o coeficiente de x^8?

E.162 Qual o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(x^2 + x^{-3})^8$?

E.163 (EFE) Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $(x - \frac{a^2}{x})^{15}$?

E.164 Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $(\sqrt{x} - \frac{a^2}{x})^{15}$?

E.165 No desenvolvimento de $(x + a)^{100}$, qual o coeficiente do termo que contém x^{60}?

E.166 Qual o termo independente de y no desenvolvimento de $(y + \frac{1}{y})^4$?

E.167 Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x})^{2n}$?

E.168 (FEI) Qual o termo independente de x no desenvolvimento de $(-x + \frac{\sqrt{2}}{x})^8$?

E.169 (ENE) Calcular o termo independente de x no desenvolvimento de $(\frac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x})^{18}$

E.170 (ITA) No desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pela fórmula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de x?

E.171 Qual o coeficiente de x^{n+1} no desenvolvimento de $(x + 2)^n \cdot x^3$?

E.172 (MACK-72) Quantos termos racionais tem o desenvolvimento de $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$?

E.173 Calcule aproximadamente $(1{,}002)^{20}$, usando o Teorema Binomial.

Solução

Vamos mostrar que $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ para nx pequeno.

De fato, pelo Teorema Binomial:

$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^n$

$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots x^n$

porém

$$\left|\frac{n(n-1)x^2}{2}\right| < \left|\frac{n^2x^2}{2}\right|$$

$$\left|\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}\right| < \left|\frac{n^3x^3}{3!}\right|$$

etc.

Se nx é pequeno (próximo de zero) então n^2x^2, n^3x^3, etc são muito pequenos, comparados com nx, então, desprezando os termos do desenvolvimento a partir do 3º termo, teremos:

$(1 + x)^n \cong 1 + n \cdot x$.

No nosso exemplo $(1{,}002)^{20} = (1 + 0{,}002)^{20} \cong 1 + 20 \cdot 0{,}002 = 1{,}04$.

Se calcularmos $(1{,}002)^{20}$ sem a aproximação, obteremos 1,0408.

E.174 Calcule aproximadamente:

a) $(1{,}002)^{10}$ b) $(0{,}997)^{20}$

E.175 Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x + 3y)^4$?

Solução

$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot (3y) + 6 \cdot (2x)^2 \cdot (3y)^2 + 4 \cdot (2x) \cdot (3y)^3 + (3y)^4$

essa igualdade vale $\forall$ x, y reais; se fizermos x = 1 e y = 1 teremos:

1º membro: $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^4 = 5^4 = 625$

2º membro: $2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot 3 + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3^3 + 3^4$

que é exatamente a soma dos coeficientes. Logo a soma dos coeficientes é 625.

E.176 Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de:

a) $(3x + 2y)^{10}$? b) $(5x + y)^8$?

E.177 (MACK) Indique a soma dos coeficientes de $(4x + 3y)^4$ sem efetuar o desenvolvimento.

E.178 Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de:

a) $(x - y)^5$? b) $(3x - y)^4$?

E.179 (EFE) Sendo 1 024 a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x + 1)^m$, calcule m.

E.180 (EFE) Sabendo-se que a soma dos coeficientes de $(a + b)^m$ é 256, calcule o número de permutações de $\frac{m}{2}$ elementos.

IV. TRIÂNGULO ARITMÉTICO DE PASCAL (OU DE TARTAGLIA)

59. É uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais: $\binom{n}{p}$.

Isto é

A 1ª linha contém o coeficiente binomial com n = 0

A 2ª linha contém os coeficientes binomiais com n = 1

A 3ª linha contém os coeficientes binomiais com n = 2

....

A kª linha contém os coeficientes binomiais com n = k

etc.

60. Podemos também escrever o triângulo de Pascal substituindo cada coeficiente binomial pelo seu valor, isto é:

61. Notemos que:

A 1ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^0$.

A 2ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^1$.

A 3ª linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^2$.

E assim por diante

$$\binom{0}{0} \longrightarrow (x + a)^0$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \longrightarrow (x + a)^1$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \longrightarrow (x + a)^2$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \longrightarrow (x + a)^3$$

62. Observação

Na construção do triângulo de Pascal, não é necessário calcular os coeficientes binomiais um a um. Basta usarmos algumas de suas propriedades.

63. Propriedades do Triângulo de Pascal

1º) Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2º) Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha, o último elemento é $\binom{n}{n} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

1
1 [1]
1 2 [1]
1 3 3 [1]
1 4 6 4 [1]
....

3º) A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e afirma que:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}} \qquad n \geqslant 2$$

A demonstração desta propriedade está na parte de exercícios resolvidos.

4º) Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos, são iguais.

Isto equivale a demonstrar que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

O que é imediato, pois

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ \binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} \end{array}\right\} \ominus$$

64. Exemplos

EXERCÍCIOS

E.181 Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas.

a) $\binom{0}{0} = 0$ c) $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$ e) $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$

b) $\binom{8}{8} = 1$ d) $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$ f) $\binom{8}{0} = \binom{15}{0}$

E.182 Demonstre que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Solução

Vamos desenvolver $(1+1)^n$ pelo Teorema **Binomial**.

Temos:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1^1 + \ldots + \binom{n}{i} 1^{n-i} \cdot 1^i + \ldots \binom{n}{n} \cdot 1^0.$$

Logo, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{i} + \ldots + \binom{n}{n}$.

E.183 Calcule:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}.$$

E.184 Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i}$ c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i}$.

E.185 Calcule m sabendo-se que

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} = 1.023.$$

E.186 Calcule: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p}$

E.187 Prove que se um conjunto A tem *n* elementos, então, o número de subconjuntos de A é 2^n.

E.188 Quantos subconjuntos não vazios possue o conjunto A com *n* elementos.

E.189 (MAPOFEI-74) Calcular o valor da expressão:

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

E.190 Demonstre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

E.191 (EESCUSP) Verificar que quando *n* é ímpar

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Sugestão:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\right] + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{3} + \binom{n}{1}\right] = 2^n$$

E.192 Prove que

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

Solução

Sabemos que:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

derivando membro a membro em relação a x, temos:

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

fazendo $x = 1$ nesta igualdade, resulta:

$n \cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ que é o que queríamos demonstrar.

E.193 Prove que:

$$2 \cdot 1\binom{n}{2} + 3 \cdot 2\binom{n}{3} + 4 \cdot 3\binom{n}{4} + \ldots + n \cdot (n-1)\binom{n}{n} = n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

E.194 Demonstre a relação de Euler

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}.$$

Sugestão: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$; desenvolva cada membro e identifique os coeficientes dos termos semelhantes.

E.195 Usando a relação de Euler, prove que:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

E.196 Demonstre a relação de Stifel, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \text{ e } p \leqslant n.$$

Solução

Consideremos um conjunto A com n elementos, e consideremos um determinado elemento $a \in A$. Vamos calcular o número de combinações dos elementos de A, tomados p a p, de dois modos:

1º modo: Diretamente pela fórmula, isto é, $\binom{n}{p}$ (I)

2º modo: Calculamos o número de combinações, que não possuam o elemento a. Tal número é $\binom{n-1}{p}$.

Em seguida, calculamos o número de combinações que possuem o elemento a. Tal número é $\binom{n-1}{p-1}$.

Ao todo, o número de combinações será:

$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ (II)

De (I) e (II) concluímos que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

E.197 Demonstre que a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos é:

$$S = \frac{n \cdot (2n+1)(n+1)}{6}.$$

Sugestão: use a identidade

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

e faça x assumir os valores 1, 2, 3, ..., n.

E.198 (MAPOFEI-76) Escreva *n* parcelas contendo o desenvolvimento de $(k+1)^3$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Some todas as parcelas, elimine os termos semelhantes e obtenha $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

E.199 Mostre que se n ($n \geqslant 2$) é par, os valores de $\binom{n}{p}$ para $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ vão crescendo, atingem um valor máximo para $p = \frac{n}{2}$ e depois vão decrescendo.

Solução

Consideremos dois coeficientes binomiais consecutivos $\binom{n}{p-1}$ e $\binom{n}{p}$ e calculemos seu quociente:

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{\frac{n!}{p!\,(n-p)!}}{\frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}} = \frac{n-p+1}{p}$$

a) Os valores de $\binom{n}{p}$ irão crescendo, até atingir o máximo se e somente se $\frac{n-p+1}{p} > 1$.

Portanto

$$n - p + 1 > p \iff n + 1 > 2p \iff p < \frac{n+1}{2}.$$

Isto é $\binom{n}{p}$ irá crescendo, quando p variar de 0 até o menor inteiro que não supera $\frac{n+1}{2}$, que é $\frac{n}{2}$.

b) Os valores de $\binom{n}{p}$ irão decrescendo se e somente se $\frac{n-p+1}{p} < 1$.

Portanto

$$n - p + 1 < p \iff n + 1 < 2p \iff p > \frac{n+1}{2}.$$

Isto é $\binom{n}{p}$ irá decrescendo, quando p variar de $\frac{n}{2} + 1$ até n.

c) De (a) concluímos que o maior valor de $\binom{n}{p}$ é atingido para $p = \frac{n}{2}$.

Exemplo: os coeficientes binomiais para n = 4 são:

E.200 Mostre que se *n* é ímpar, os valores de $\binom{n}{p}$ para p = 0, 1, 2, ..., n, vão crescendo, atingirão valor máximo para dois valores de p $\left(p = \frac{n-1}{2} \text{ e } p = \frac{n+1}{2}\right)$ e em seguida vão decrescendo.

E.201 (FEI) Calcule p na equação $\binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6}$.

Solução

Já vimos que a equação em x, $\binom{n}{x} = \binom{n}{p}$, tem solução para x = p ou x = n − p.

Em virtude das propriedades dadas nos exercícios 200 e 199, isto é, os binomiais $\binom{n}{x}$ crescem inicialmente, atingem um, ou dois valores máximos, e depois decrescem, concluímos que $\binom{n}{x} = \binom{n}{p}$ para no máximo dois valores de x que conforme já vimos, são x = p e x = n − p.

Portanto, a solução da equação dada é:

$$\begin{cases} 3p = p + 6 \quad (1) \\ \text{ou} \\ 3p = 14 - (p + 6) \quad (2) \end{cases}$$

(1) ⇒ p = 3 ou (2) ⇒ p = 2.

E.202 (ENE) Sendo $\binom{10}{p-3} = \binom{10}{p+3}$ calcule p.

E.203 Resolver $\binom{14}{x} = \binom{14}{2x-1}$.

E.204 Resolver a equação: $\binom{12}{p+3} = \binom{12}{p-1}$.

E.205 Qual o(s) maior(es) coeficiente(s) binomiais $\binom{n}{p}$ para:

a) n = 12? b) n = 15?

E.206 Qual o termo de maior coeficiente no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + y^2)^{10}$?

V. EXPANSÃO MULTINOMIAL

65. Já vimos como é possível obter o desenvolvimento de um binômio $(x + a)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos agora, com raciocínio semelhante, obter o desenvolvimento de expressões do tipo $(x + y + z)^n$, $(x + y + z + t)^n$ etc. ($n \in \mathbb{N}$), onde a base da potência de expoente *n* é um polinômio.

66. **Exemplo 1**

$$(x + y + z)^5 = \underbrace{(x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z)}_{5 \text{ fatores.}}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação, devemos tomar um termo de cada fator (escolhidos entre x, y, z) e em seguida multiplicá-los. Feitas todas as escolhas possíveis e multiplicados os termos, a soma desses produtos será o desenvolvimento de $(x + y + z)^5$. Os tipos de produtos que podemos obter são da forma:

$$x^i \cdot y^j \cdot z^k$$

onde $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$.

Para cada i, j, k fixados, o coeficiente do termo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ será o número de seqüências de cinco letras, com *i* letras *x*, *j* letras *y*, e *k* letras *z*, isto é:

$$P_5^{i,j,k} = \frac{5!}{i!\, j!\, k!}.$$

Portanto o coeficiente de $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ é $\frac{5!}{i!\, j!\, k!}$.

Tomando todos os termos do tipo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ para $i, j, k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$ e calculando os seus coeficientes, a soma deles, precedidos pelos respectivos coeficientes, dará a expansão de $(x + y + z)^5$.

Em particular, o coeficiente do termo $x^2 \cdot y^2 \cdot z$ será:

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\, 2!\, 1!} = 30.$$

Portanto, o termo em $x^2 y^2 z$ será $30x^2 \cdot y^2 \cdot z$.

De um modo geral, a expansão do polinômio, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$, com $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ será

$$\sum \left(\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} \, x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} \right)$$

onde a soma é estendida para:

$$\begin{cases} n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N} \\ \quad e \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n. \end{cases}$$

67. Exemplo 2

Qual o coeficiente de xyz no desenvolvimento de $(x + y + z)^3$?
O coeficiente de xyz é:

$$P_3^{1,1,1} = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6.$$

68. Exemplo 3

Qual o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^{10}$?
O termo genérico é

$$\frac{10!}{i!\,j!\,k!} (1)^i \cdot (x)^j \cdot (x^2)^k = \frac{10!}{i!\,j!\,k!} x^{j+2k}.$$

Devemos impor que $j + 2k = 5$. Vamos resolver essa equação, atribuindo valores para j, e notando que i está automaticamente determinado pela condição $i + j + k = 10$.

j	k	i
1	2	7
3	1	6
5	0	5

Notemos que para $j = 0$ ou $j = 2$ ou $j = 4$ ou $j = 6$ ou $j = 7$ ou $j = 8$ ou $j = 9$ ou $j = 10$ não existe $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $j + 2k = 5$.

Temos, então:

1) $i = 7$; $j = 1$; $k = 2$

o coeficiente de x^5 será: $\frac{10!}{7!\,1!\,2!} = 360.$

2) $i = 6$; $j = 3$; $k = 1$

o coeficiente de x^5 será: $\frac{10!}{6!\,3!\,1!} = 840.$

3) $i = 5$; $j = 5$; $k = 0$

o coeficiente de x^5 será: $\frac{10!}{5!\,5!\,0!} = 252.$

Logo o coeficiente de x^5 (desenvolvendo todo o polinômio) será:
$(360 + 840 + 252) = 1\,452.$

EXERCÍCIOS

E.207 Desenvolvendo-se o polinômio $(x + y + z)^4$, qual o coeficiente do termo em x^2yz? E do termo xyz^2?

E.208 Qual o coeficiente do termo em $x^2y^3z^2$ no desenvolvimento de $(x + y + z)^7$?

E.209 (FFCLUSP) Mostrar que o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + 3x + 2x^2)^{10}$ é 3 780.

E.210 Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(x + y + z)^5$?

Como ganhar em jogos de azar

Abraham De Moivre nasceu na França mas, após a revogação do Édito de Nantes, foi para a Inglaterra, onde dava grande quantidade de aulas de Matemática para se sustentar.

Tomou contato com Newton e Halley e em 1697 foi eleito para o Royal Society e mais tarde para as Academias de Paris e Berlim. Pretendia ser professor em uma academia mas mesmo com a proteção de Leibniz não conseguiu e isso se deve em parte a sua descendência inglesa.

Moivre foi o mais importante devoto da Teoria das Probabilidades, interessando-se em desenvolver processos gerais e notações que considerava como uma "nova Álgebra".

Sua obra mais célebre foi a *"Doutrina das Probabilidades"*, em 1718, onde apresenta mais de cinquenta problemas e questões, entre outros, a questão sobre dados, a probabilidade de tirar bolas de cores diferentes de uma urna e outros jogos. O prefácio deste livro refere-se às obras de probabilidades de Jacques, Jean e Nicolaus Bernoulli.

É atribuído a Moivre o princípio segundo o qual a probabilidade de um evento composto é o produto das probabilidades das componentes, embora essa idéia já tivesse aparecido em trabalhos anteriores. Este princípio aparece no *"Doutrina"* que ainda contém os primeiros vestígios da lei dos erros ou curvas de distribuição interpretada por Moivre.

Abraham de Moivre
(1667 — 1754)

Em 1730 publicou *"Miscelânea Analítica"* onde dá um desenvolvimento analítico da Trigonometria e um de seus mais importantes resultados é a fórmula $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$.

Moivre manteve cordial e extensa correspondência com Jean Bernoulli entre 1704 e 1714, tais eram os interesses comuns sobre séries infinitas e probabilidades. Nesta época, seus resultados adquiriram tamanha importância que Newton ao ser procurado para responder questões de Matemática, dizia "Procure M. Moivre; ele sabe essas coisas melhor que eu".

Moivre morreu aos 88 anos, oito anos depois de Maclaurin, e a partir daí, a pesquisa matemática permaneceu por muito tempo estagnada na Inglaterra.

CAPÍTULO III

PROBABILIDADE

I. EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

69. Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral, conseguimos descrever o conjunto de *todos os resultados possíveis* que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos *acaso*.

70. Exemplos de Experimentos Aleatórios

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

c) Lançar duas moedas e observar as seqüências de caras e coroas obtidas.

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas.

e) De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.

f) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor.

g) De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta, e observar seu naipe.

h) Numa cidade onde 10% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.

i) Observar o tempo que um certo aluno gasta para ir de ônibus, de sua casa até a escola.

j) Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminuiu.

k) Sujeitar uma barra metálica a tração e observar sua resistência.

II. ESPAÇO AMOSTRAL

71. Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por *todos os resultados possíveis* de um experimento aleatório.

72. Exemplos

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

$\Omega = \{K, C\}$ onde K representa *cara* e C, *coroa*.

b) Lançar uma dado e observar o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

$\Omega = \{V, B, A\}$.

d) Lançar uma moeda duas vezes e observar a seqüência de caras e coroas.

$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

e) Lançar uma moeda duas vezes e observar o número de caras.

$\Omega = \{0, 1, 2\}$

f) Um lote tem 20 peças. Uma a uma elas são ensaiadas e observa-se o número de defeituosas.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$.

g) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (K) ocorra pela primeira vez. Observa-se em qual lançamento esse fato ocorre.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

73. Observação

Diremos que o espaço amostral Ω é finito, se $\# \Omega = n \in \mathbb{N}^*$ (é o caso dos exemplos a, b, c, d, e, f); caso contrário diremos que Ω é infinito (é o caso do exemplo g).

Neste livro, nos restringiremos aos experimentos aleatórios cujos espaços amostrais são finitos.

EXERCÍCIOS

Dar um espaço amostral para cada experimento abaixo.

E.211 Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE.

E.212 Uma urna contém bolas vermelhas (V), bolas brancas (B) e bolas azuis (A). Uma bola é extraída e observada sua cor.

E.213 Uma urna tem 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é extraída e observado seu número.

E.214 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observada.

E.215 Uma urna contém 5 bolas vermelhas (V) e 2 brancas (B). Duas bolas são extraídas, sem reposição, e observadas suas cores, na seqüência que foram extraídas.

E.216 Três pessoas A, B, C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.

E.217 Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a seqüência de sexos dos 3 filhos.

E.218 Dois dados, um verde e um vermelho são lançados; observa-se os números das faces de cima.

Solução

Podemos considerar cada resultado como um par de números (a, b) onde *a* representa o resultado no dado verde e *b* o resultado no dado vermelho. Isto é, Ω é o conjunto.

$$\Omega = \{\begin{matrix} (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) & (5, 1) & (6, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) & (5, 2) & (6, 2) \\ (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) & (4, 3) & (5, 3) & (6, 3) \\ (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) & (5, 4) & (6, 4) \\ (1, 5) & (2, 5) & (3, 5) & (4, 5) & (5, 5) & (6, 5) \\ (1, 6) & (2, 6) & (3, 6) & (4, 6) & (5, 6) & (6, 6) \end{matrix}\}$$

E.219 Entre 5 pessoas A, B, C, D, E, duas são escolhidas para formarem uma comissão. Observam-se os elementos dessa comissão.

E.220 A uma pessoa (não nascida em ano bissexto) é perguntada a data de seu aniversário (mas não o ano do nascimento). Observa-se esta data.

III. EVENTO

74. Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamaremos de *evento* todo subconjunto de Ω. Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, . . . , X, Y, Z.

Diremos que *um evento A ocorre* se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um *único elemento* ($\# A = 1$) serão chamados eventos elementares.

75. Exemplos

1º) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos

A: ocorrência de número ímpar. $A = \{1, 3, 5\}$.

B: ocorrência de número primo. $B = \{2, 3, 5\}$.

C: ocorrência de número menor que 4. $C = \{1, 2, 3\}$.

D: ocorrência de número menor que 7. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

E: ocorrência de número maior ou igual a 7. $E = \varnothing$.

2º) Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a seqüência de caras e coroas.

$\Omega = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, K, K); (C, K, C); (C, C, K); (C, C, C)\}$.

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de cara (K) no 1º lançamento

$A = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C)\}$

B: ocorrência de exatamente uma coroa

$B = \{(K, K, C); (K, C, K); (C, K, K)\}$

C: ocorrência de, no máximo, duas coroas

$C = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, K, K); (C, K, C); (C, C, K)\}$

D: ocorrência de pelo menos duas caras

$D = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (C, K, K)\}$

76. Observação

Notemos que, se $\# \Omega = n$, então Ω terá 2^n subconjuntos e, portanto, 2^n eventos. Entre os eventos, salientamos o $\varnothing$ (chamado *evento impossível*) e o próprio Ω (chamado *evento certo*).

IV. COMBINAÇÕES DE EVENTOS

Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos), poderemos combinar conjuntos (eventos), para formar novos conjuntos (eventos).

77. a) União de dois Eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, *A ou B (ou ambos) ocorrem*. Dizemos que $A \cup B$ é a *união* entre o evento A e o evento B.

78. b) Intersecção de dois Eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, *A e B ocorrerem simultaneamente*. Dizemos que $A \cap B$ é a *intersecção* entre o evento A e o evento B.

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados *mutuamente exclusivos*.

79. c) Complementar de um Evento

Seja A um evento; então A^C será também um evento que ocorrerá se, e somente se, *A não ocorrer*.

Dizemos que A^C é o *evento complementar de A*.

80. Exemplo

Um dado é lançado e observado o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sejam os eventos:

A: ocorrência de número par $A = \{2, 4, 6\}$

B: ocorrência de número maior ou igual a 4 $B = \{4, 5, 6\}$

C: ocorrência de número ímpar $C = \{1, 3, 5\}$

então teremos:

$A \cup B$: ocorrência de número par ou número maior ou igual a 4.

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

$A \cap B$: ocorrência de um número par e um número maior ou igual a 4.

$A \cap B = \{4, 6\}$

$A \cap C$: ocorrência de um número par e um número ímpar.

$A \cap C = \emptyset$ (A e C mutuamente exclusivos).

A^C: ocorrência de um número não par

$A^C = \{1, 3, 5\}$

B^C: ocorrência de um número menor que 4

$B^C = \{1, 2, 3\}$

81. d) União de *n* Eventos

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma seqüência de eventos, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, *ao menos um dos eventos A_j ocorrer*. Dizemos que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

82. e) Intersecção de *n* Eventos

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma seqüência de eventos, então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, *todos os eventos A_j ocorrerem simultaneamente*.

83. Exemplo

Um número é sorteado entre os 100 inteiros de 1 a 100. Sejam os eventos A_i: ocorrência de um número maior que i, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Então:

$A_1 = \{2, 3, \ldots, 100\}$
$A_2 = \{3, 4, \ldots, 100\}$
$A_3 = \{4, 5, \ldots, 100\}$
$A_4 = \{5, 6, \ldots, 100\}$

$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \{2, 3, \ldots, 100\}$ $\qquad$ $\bigcap_{i=1}^{4} A_i = \{5, 6, \ldots, 100\}$.

EXERCÍCIOS

E.221 Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e observado seu número. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$. Descrever os eventos:

a) o número obtido é par,
b) o número obtido é ímpar,
c) o número obtido é primo,
d) o número obtido é maior que 16,
e) o número é múltiplo de 2 e de 5,
f) o número é múltiplo de 3 ou de 8,
g) o número não é múltiplo de 6.

E.222 Dois dados, um verde e um vermelho são lançados. Seja Ω o conjunto dos pares (a, b) onde *a* representa o número do dado verde e *b* do dado vermelho.
Descrever os eventos:

a) A: ocorre 3 no dado verde,
b) B: ocorrem números iguais nos dois dados,
c) C: ocorre número 2 em ao menos um dado,
d) D: ocorrem números cuja soma é 7,
e) E: ocorrem números cuja soma é menor que 7.

E.223 Uma moeda e um dado são lançados. Seja

$\Omega = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$.

Descreva os eventos:

a) A: ocorre cara,
b) B: ocorre número par,
c) C: ocorre o número 3,
d) $A \cup B$,
e) $B \cap C$,
f) $A \cap C$,
g) A^C,
h) C^C.

E.224 Um par ordenado (a, b) é escolhido entre os 20 pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$ onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Considere $\Omega = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ Descrever os eventos:

a) $A = \{(x, y) \mid x = y\}$
b) $B = \{(x, y) \mid x > y\}$
c) $C = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$
d) $D = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
e) $E = \{(x, y) \mid x = 1\}$
f) $F = \{(x, y) \mid y = 3\}$.

E.225 Uma urna I tem duas bolas vermelhas (V) e três brancas e a urna II tem cinco bolas vermelhas e seis brancas. Uma urna é escolhida e dela extraída uma bola e observada sua cor. Seja:

$\Omega = \{(I, V); (I, B); (II, V); (II, B)\}$

Descreva os eventos:

a) A: a urna escolhida é a I
b) B: a urna escolhida é a II
c) C: a bola escolhida é vermelha
d) D: a bola escolhida é branca
e) $A \cup B$
f) $A \cap C$
g) D^C.

E.226 Um experimento consiste em perguntar a 3 mulheres se elas usam ou não o sabonete marca A.

a) Dar um espaço amostral para o experimento.

b) Descrever o evento A: no máximo duas mulheres usam o sabonete marca X.

V. FREQÜÊNCIA RELATIVA

84. Num experimento aleatório, embora não saibamos qual o evento que irá ocorrer, sabemos que alguns eventos ocorrem freqüentemente e outros, raramente. Desejamos então, associar aos eventos, *números* que nos dêem uma *indicação quantitativa* da ocorrência dos mesmos, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições. Para isso, vamos definir *freqüência relativa de um evento.*

85. Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral Ω, finito isto é, $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Suponhamos que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar a_i. Definimos *freqüência relativa do evento* $\{a_i\}$ como sendo o número f_i, tal que

$$f_i = \frac{n_i}{N} \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

Por exemplo, se lançarmos um dado 100 vezes (N = 100) e observarmos o número 2 (evento 2) 18 vezes, então, a freqüência relativa desse evento elementar será:

$$f_2 = \frac{18}{100} = 0{,}18.$$

A freqüência relativa possue as seguintes propriedades:

a) $0 \leqslant f_i \leqslant 1 \quad \forall i$, pois $0 \leqslant \frac{n_i}{N} \leqslant 1$.

b) $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$ pois

$$\frac{n_i}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

c) Se A é um evento de Ω $(A \neq \varnothing)$, a freqüência relativa do evento A (f_A) é o número de vezes que ocorre A, dividido por N. É claro que

$$f_A = \sum_{a_i \in A} \frac{n_i}{N} = \sum_{a_i \in A} f_i.$$

Por exemplo se $A = \{a_1, a_3, a_5\}$ então:

$$f_A = \frac{n_1 + n_3 + n_5}{N} = f_1 + f_3 + f_5.$$

d) Verifica-se *experimentalmente* que a freqüência relativa tende a se "estabilizar" em torno de algum valor bem definido, quando o número N de repetições do experimento é suficientemente grande.

VI. DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

86. Já vimos que a freqüência relativa nos dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento, quando o experimento é realizado um grande número de vezes. O que iremos fazer é definir um *número associado a cada evento*, de modo que ele tenha as mesmas características da freqüência relativa. É claro que desejamos que a freqüência relativa do evento esteja "próxima" desse *número*, quando o experimento é repetido muitas vezes. A esse número daremos o nome de *probabilidade do evento* considerado.

87. Consideremos então um espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. A cada *evento elementar* $\{a_i\}$ vamos associar um *número real*, indicado por $p(\{a_i\})$ ou p_i, chamado *probabilidade do evento* $\{a_i\}$, satisfazendo as seguintes condições:

(I) $0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

(II) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$

Dizemos que os números $p_1, p_2, \ldots, p_k$ definem uma *distribuição de probabilidades* sobre Ω.

Em seguida, seja A um evento qualquer de Ω. Definimos *probabilidade do evento A* (e indicamos por P(A)) da seguinte forma:

a) Se $A = \varnothing$, $P(A) = 0$

b) Se $A \neq \varnothing$, $P(A) = \displaystyle\sum_{a_i \in A} p_i$.

Isto é, a probabilidade de um evento constituído por um certo número de elementos é a soma das probabilidades dos resultados individuais que constituem o evento A.

88. Exemplo

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Consideremos a distribuição de probabilidades:

$p_1 = 0{,}1 \quad p_2 = 0{,}3 \quad p_3 = 0{,}2 \quad p_4 = 0{,}4$

seja o evento $A = \{a_1, a_2, a_4\}$ então, por definição:

$P(A) = p_1 + p_2 + p_4 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}8$.

89. Observação

Mostramos acima, como se pode calcular a probabilidade de um evento A ($P(A)$) quando é dada uma distribuição de probabilidades sobre Ω. Surge então a pergunta. Que critérios usamos para obter os números $p_1, p_2, \ldots, p_k$?

Podemos responder dizendo inicialmente que, do ponto de vista formal, quaisquer valores $p_1, p_2, \ldots, p_k$ satisfazendo:

I) $0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

II) $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

constituem uma distribuição de probabilidades sobre Ω. Por outro lado, para sermos *realistas*, devemos fazer com que cada número p_i esteja "próximo" da freqüência relativa f_i, quando o experimento é repetido muitas vezes.

Isto pode ser feito, levantando-se hipóteses a respeito do experimento, como por exemplo considerações de simetria; é claro que nestas hipóteses é fundamental a *experiência* e o *bom senso* de quem vai atribuir as probabilidades aos eventos elementares. Nenhuma pessoa de bom senso diria que a probabilidade de observarmos uma bola vermelha é igual a de observarmos uma bola branca, quando extraímos uma bola de uma urna contendo 9 bolas vermelhas e uma branca. Por outro lado, se faltam hipóteses para uma conveniente escolha de uma distribuição, recorre-se então à experimentação para se avaliar os p_i's através da freqüência relativa.

90. Exemplos

1º) Uma moeda é lançada e observada a face de cima.

Temos:

$$\Omega = \{\underset{\substack{\uparrow \\ p_1}}{K}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_2}}{C}\}$$

Uma distribuição razoável para Ω seria: $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Isto significa que admitimos que a freqüência relativa de caras e de coroas é próxima de $\frac{1}{2}$ quando a moeda é lançada muitas vezes.

Experiências históricas foram feitas por Buffon, que lançou uma moeda 4 048 vezes e observou o resultado cara 2 048 vezes (freqüência relativa de caras: $\frac{2\,048}{4\,048} = 0{,}5059$).

2º) Um dado é lançado, e observado o número da face de cima.

Temos:

$$\Omega = \{\underset{\substack{\uparrow \\ p_1}}{1}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_2}}{2}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_3}}{3}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_4}}{4}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_5}}{5}, \underset{\substack{\uparrow \\ p_6}}{6}\}$$

Uma atribuição razoável para p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 (por razões de simetria) é:

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.

Nesse caso, a probabilidade de ocorrência de um número ímpar ($A = \{1, 3, 5\}$) será:

$P(A) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3º) Seja $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

Se $p_4 = 4p_1$, $p_3 = 3p_1$ e $p_2 = 2p_1$ qual a probabilidade do evento $A = \{a_1, a_4\}$?

Temos:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$
$p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$
$10p_1 = 1 \quad p_1 = \frac{1}{10}$.

Logo $p_2 = \frac{2}{10}$, $p_3 = \frac{3}{10}$ e $p_4 = \frac{4}{10}$

Portanto, $P(A) = p_1 + p_4 = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$.

VII. TEOREMAS SOBRE PROBABILIDADES EM ESPAÇO AMOSTRAL FINITO

91. Teorema 1

"A probabilidade do evento certo é 1".

Demonstração

De fato, o evento certo é $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e por definição:
$P(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

92. Teorema 2

"Se $A \subset B$ então $P(A) \leqslant P(B)$".

Demonstração

1) Se $A = B$, por definição $P(A) = P(B)$ e portanto $P(A) \leqslant P(B)$.
2) Se $A \subsetneqq B$

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$
e $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+q}\}$

então:

$P(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r$
$P(B) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r + p_{r+1} + \ldots + p_{r+q}$.

Como:

$p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots, p_{r+q}$ são todos não negativos, segue-se que:
$P(A) \leqslant P(B)$
no caso particular de $A = \varnothing$, temos $P(A) = 0$ e $P(B) \geqslant 0$, e portanto $P(A) \leqslant P(B)$

93. Teorema 3

"Se A é um evento, então $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$".

Demonstração

$\varnothing \subset A \subset \Omega$

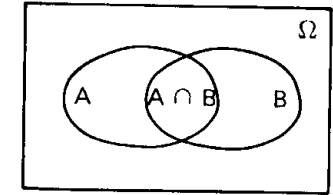
Logo, pelo teorema 2:

$P(\varnothing) \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega)$ e portanto $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

94. Teorema 4

"Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$".

Demonstração

$$P(A \cup B) = \sum_{a_j \in A \cup B} p_j.$$

Por outro lado, $P(A) = \sum_{a_j \in A} p_j$ e $P(B) = \sum_{a_j \in B} p_j$.

Ora, quando somamos $P(A) + P(B)$ as probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cap B$ são computadas duas vezes (uma, por estarem em A e outra, por estarem em B).

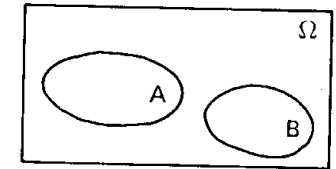
Portanto $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ é a soma das probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cup B$, logo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

95. Observações

a) Em particular, se A e B são mutuamente exclusivos ($A \cap B = \varnothing$), então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(\varnothing)}_{0}$$

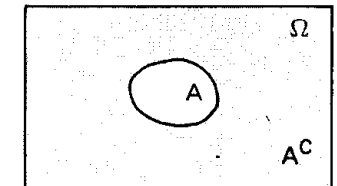
$$= P(A) + P(B).$$

b) O resultado anterior pode ser generalizado para *n* eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuamente exclusivos dois a dois, da seguinte forma:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

96. Teorema 5

"Se A é um evento então $P(A^C) = 1 - P(A)$".

Demonstração

Como $A \cap A^C = \varnothing$ e $A \cup A^C = \Omega$
segue-se pelo Teorema 4, que
$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$
logo
$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$.

97. Exemplo de Aplicação dos Teoremas

Uma urna contém 100 bolinhas numeradas, de 1 a 100. Uma bolinha é escolhida e observado seu número. Admitindo-se probabilidades iguais a $\frac{1}{100}$ para todos os eventos elementares, qual a probabilidade de:

a) Observarmos um múltiplo de 6 e de 8 simultaneamente?
b) Observarmos um múltiplo de 6 ou de 8?
c) Observarmos um número não múltiplo de 5?

Temos:

$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

a) Um múltiplo de 6 e 8 simultaneamente terá que ser múltiplo de 24, portanto, o evento que nos interessa é: $A = \{24, 48, 72, 96\}$

$$P(A) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

b) Sejam os eventos:
B: o número é múltiplo de 6. C: o número é múltiplo de 8.

o evento que nos interessa é $B \cup C$, então

$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$

e $P(B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

$C = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$

e $P(C) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

Portanto $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

ora, $B \cap C$ nada mais é do que o evento A (do item a).

Logo, $P(B \cap C) = \frac{1}{25}$.

Segue-se então que: $P(B \cup C) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} - \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$.

c) Seja D o evento, o número é múltiplo de 5.

Temos:

$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$

$P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

O evento que nos interessa é D^C. Logo, $P(D^C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

EXERCÍCIOS

E.227 Considere o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e a distribuição de probabilidades, tal que:

$p_1 = p_2 = p_3$ e $p_4 = 0,1$. Calcule:

a) p_1, p_2 e p_3.
b) Seja A o evento $A = \{a_1, a_3\}$. Calcule P(A).
c) Calcule $P(A^C)$.
d) Seja B o evento $B = \{a_1, a_4\}$. Calcule P(B).
e) Calcule $P(A \cup B)$, e $P(A \cap B)$.
f) Calcule $P[(A \cup B)^C]$ e $P[(A \cap B)^C]$

E.228 Seja $\Omega = \{K, C\}$ o espaço amostral do lançamento de uma moeda. É correta a distribuição de probabilidades P(K) = 0,1, P(C) = 0,9?
(Lance uma moeda 100 vezes, calcule a freqüência relativa do evento cara e verifique se esta distribuição é compatível com a realidade).

E.229 Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer cara no lançamento desta moeda,
b) ocorrer coroa no lançamento desta moeda.

E.230 Um dado é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer número par,
b) ocorrer número maior ou igual a 5.

Solução:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Temos

$p_2 = 2p_1$
$p_3 = 3p_1$
$p_4 = 4p_1$
$p_5 = 5p_1$
$p_6 = 6p_1$

Porém, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

Logo, $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 + 5p_1 + 6p_1 = 1 \Longrightarrow 21p_1 = 1 \Longrightarrow p_1 = \frac{1}{21}$.

a) o evento que nos interessa é $A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

b) o evento que nos interessa é $B = \{5, 6\}$

$P(B) = p_5 + p_6 = 5 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$.

E.231 Um dado é viciado de modo que a probabilidade de observarmos qualquer número par é a mesma, e a de observarmos qualquer número ímpar é também a mesma. Porém um número par é três vezes mais provável de ocorrer, do que um número ímpar. Lançando-se esse dado, qual a probabilidade de:

a) ocorrer um número primo?
b) ocorrer um múltiplo de 3?
c) ocorrer um número menor ou igual a 3?

E.232 Seja o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ e considere a distribuição de probabilidades

$p_i = p(\{a_i\}) = K \cdot i \quad \forall i \in \{1, 2\ 3, \ldots, 10\}$

a) Calcule K.
b) Calcule p_3 e p_7.
c) Seja o evento $A = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$, calcule P(A).
d) Calcule $P(A^C)$.

E.233 Seja o espaço amostral:

$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

e considere a distribuição de probabilidades

$p_i = p(\{i\}) = \binom{10}{i} (0,6)^i \cdot (0,4)^{10-i} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

a) Mostre que $\sum_{i=0}^{10} p_i = 1$.
b) Calcule p_3.
c) Seja o evento $A = \{0, 1, 2\}$. Calcule P(A) e $P(A^C)$.

E.234 Se A e B são eventos quaisquer Ω, prove que $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

E.235 Se A e B são eventos de Ω, prove que:

$P(A \cap B) \leqslant P(A) \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

E.236 Se A e B são eventos tais que: P(A) = 0,2, P(B) = 0,3 e $P(A \cap B) = 0,1$.
Calcule:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A^C)$ c) $P(B^C)$.

E.237 Se A, B e C são eventos de Ω, prove que:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

E.238 Se A, B e C são eventos tais que:

$P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,6$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0,2$ e $P(A \cap B \cap C) = 0,1$ calcule:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cup C)$ c) $P(A \cup B \cup C)$.

VIII. ESPAÇOS AMOSTRAIS EQUIPROVÁVEIS

98.* Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Diremos que uma distribuição de probabilidades sobre Ω é *equiprovável*, se $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$ isto é, se *todos os eventos elementares de* Ω *tiverem a mesma probabilidade*. Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.

99. Exemplo

De um baralho de 52 cartas, uma delas é escolhida.

Seja: $\Omega = \{2c, 2o, 2e, 2p, 3c, 3o, 3e, 3p, \ldots, Ac, Ao, Ae, Ap\}$.

Os índices c, o, e, p indicam, respectivamente, naipe de copas, ouros, espadas e paus.

É razoável supor que cada evento elementar tenha a mesma probabilidade. Como temos 52 elementos em Ω então a probabilidade de qualquer evento elementar é:

$$p = \frac{1}{52}.$$

Seja o evento A: a carta é de copas.

Então: $A = \{2c, 3c, 4c, \ldots, Kc, Ac\}$

Como $\# A = 13$ $\quad P(A) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Seja o evento B: a carta é um rei.

Então: $B = \{Kc, Ko, Ke, Kp\}$

$$P(B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Seja o evento C: a carta é um rei de copas.

Então: $C = \{K_c\}$

$$P(C) = \frac{1}{52}.$$

IX. PROBABILIDADE DE UM EVENTO NUM ESPAÇO EQUIPROVÁVEL

100. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$ e uma distribuição equiprovável $p_i = \frac{1}{K}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, K\}$.

Seja A um evento, tal que:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$$

$$P(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r = \underbrace{\frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \ldots + \frac{1}{K}}_{r \text{ vezes}}$$

$P(A) = \frac{r}{K}$, isto é, num espaço Ω, com distribuição equiprovável.

$$\boxed{P(A) = \frac{r}{K} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

101. Observação

Dado um conjunto com N elementos, *escolher ao acaso* n elementos desse conjunto, significa que cada subconjunto (ordenado ou não) de n elementos tem a mesma probabilidade de ser escolhido.

102. Exemplo

De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de copas?

Temos:

Cada par de cartas possíveis de serem extraídas, pode ser considerado como uma combinação das 52 cartas tomadas duas a duas. Isto é,

$$\Omega = \{\{2_c, 2_e\}, \{2_c, 2_p\}, \ldots, \{5_c, 7_e\}, \ldots, \{A_e, A_p\}\}$$

e nesse caso $\# \Omega = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1.326$.

A é o evento (subconjunto) formado pelas combinações de cartas de copas, isto é

$$A = \{\{2_c, 3_c\}, \{2_c, 4_c\}, \ldots, \{K_c, A_c\}\}$$

e nesse caso $\# A = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$.

Logo, $P(A) = \frac{78}{1\,326} = \frac{39}{663} = \frac{1}{17}$.

Poderíamos ter resolvido o problema, considerando Ω como sendo formado por arranjos, ao invés de combinações, isto é,

$$\Omega = \{(2_c, 2_p); (2_p, 2_c); \ldots; (6_p, 3_c); (3_c, 6_p); \ldots; (A_C, A_p)\}$$

e $\#\Omega = A_{52,2} = 52 \cdot 51 = 2\,652$.

e o evento A seria formado pelos arranjos de duas cartas de copas, isto é:

$$A = \{(2_c, 3_c), (3_c, 2_c), \ldots, (K_c, A_c), (A_c, K_c)\}$$

e $\#A = A_{13,2} = 13 \cdot 12 = 156$.

Portanto:

$$P(A) = \frac{156}{2.652} = \frac{1}{17}.$$

Isto é, Ω pode ser descrito como conjunto de arranjos ou de combinações, que a probabilidade do evento será a mesma. No entanto, é importante observar que se Ω for formado por combinações, A também terá que ser (pois $A \subset \Omega$), bem como, se for Ω formado por arranjos, A também o será.

Em muitos problemas de probabilidades ocorre esse fato, isto é, a escolha do espaço amostral é facultativa. Entretanto, em outros problemas, como veremos, isto não será possível.

EXERCÍCIOS

E.239 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de cada um dos eventos abaixo?

a) ocorre dama de copas
b) ocorre dama
c) ocorre carta de naipe "paus"
d) ocorre dama ou rei ou valete
e) ocorre uma carta que não é um rei.

E.240 Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade do número escolhido

a) ser par?
b) ser ímpar?
c) ser primo?
d) quadrado perfeito?

E.241 Um número é escolhido ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100. Qual a probabilidade do número

a) ser múltiplo de 9?
b) ser múltiplo de 3 e de 4?
c) ser múltiplo de 3 ou de 4?

E.242 Os coeficientes a e b da equação $ax = b$ são escolhidos ao acaso entre os pares ordenados do produto cartesiano $A \times A$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo *a* o 1º elemento do par e *b* o 2º. Qual a probabilidade da equação ter raízes inteiras?

E.243 Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso da urna. Qual a probabilidade da bola escolhida ser:

a) branca?
b) vermelha?
c) azul?

Solução

Sejam:

B_1, B_2, B_3 as bolas brancas
V_1, V_2 as bolas vermelhas
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 as bolas azuis.

Um espaço amostral para o experimento é:

$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\#\Omega = 10$.

a) Seja o evento A: a bola extraída é branca, então:

$A = \{B_1, B_2, B_3\}$, $\#A = 3$, logo

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

b) Seja o evento B: a bola extraída é vermelha, então $B = \{V_1, V_2\}$, $\#B = 2$, logo

$$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

c) Seja o evento C: a bola extraída é azul, então:

$C = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\#C = 5$, logo

$$P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

E.244 Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade:

a) da bola não ser amarela?
b) da bola ser branca ou preta?
c) da bola não ser branca, nem amarela?

E.245 Dois dados, um verde e um vermelho são lançados e observados os números das faces de cima.

a) Qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?
b) Qual a probabilidade de ocorrerem números diferentes?
c) Qual a probabilidade da soma dos números ser 7?
d) Qual a probabilidade da soma dos números ser 12?
e) Qual a probabilidade da soma dos números ser menor ou igual a 12?
f) Qual a probabilidade de aparecer número 3 em ao menos um dado?

E.246 Numa cidade, 30% dos homens são casados, 40% são solteiros, 20% são desquitados e 10% são viúvos. Um homem é escolhido ao acaso.

a) Qual a probabilidade dele ser solteiro?
b) Qual a probabilidade dele não ser casado?
c) Qual a probabilidade dele ser solteiro ou desquitado?

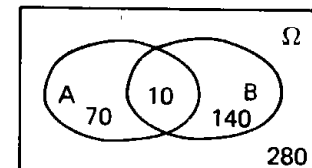
E.247 Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Economia e 10 estudam Engenharia e Economia. Se um aluno é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de que:

a) ele estude Economia e Engenharia?
b) ele estude somente Engenharia?
c) ele estude somente Economia?
d) ele não estude Engenharia, nem Economia?
e) ele estude Engenharia ou Economia?

Solução

Sejam os eventos:

A: o aluno estuda Engenharia.
B: o aluno estuda Economia.

O diagrama ao lado, permite responder facilmente as perguntas.

É fácil perceber que 280 alunos não estudam Engenharia, nem Economia: $(500 - 70 - 10 - 140 = 280)$.

a) $\frac{10}{500} = \frac{1}{50}$

b) $\frac{70}{500} = \frac{7}{50}$

c) $\frac{140}{500} = \frac{7}{25}$

d) $\frac{280}{500} = \frac{14}{25}$

e) $\frac{220}{500} = \frac{11}{25}$

E.248 De um grupo de 200 pessoas, 160 têm fator RH positivo, 100 têm sangue tipo O e 80 têm fator RH positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

a) seu sangue ter fator RH positivo?
b) seu sangue não ser tipo O?
c) seu sangue ter fator RH positivo ou ser tipo O?

E.249 Uma cidade tem 50 000 habitantes e 3 jornais A, B, C. Sabe-se que:
15 000 lêem o jornal A
10 000 lêem o jornal B
8 000 lêem o jornal C
6 000 lêem os jornais A e B.
4 000 lêem os jornais A e C
3 000 lêem os jornais B e C
1 000 lêem os três jornais.
Uma pessoa é selecionada ao acaso. Qual a probabilidade de que:

a) ela leia pelo menos um jornal?
b) leia só um jornal?

E.250 Um colégio tem 1 000 alunos. Destes:
200 estudam Matemática
180 estudam Física
200 estudam Química
20 estudam Matemática, Física e Química
50 estudam Matemática e Física
50 estudam Física e Química
70 estudam somente Química.
Um aluno do colégio é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de

a) ele estudar só Matemática?
b) ele estudar só Física?
c) ele estudar Matemática e Química?

E.251 Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de:

a) observarmos 3 coroas?
b) observarmos exatamente uma coroa?
c) observarmos pelo menos uma cara?
d) observarmos nenhuma coroa?
e) observarmos no máximo 2 caras?

E.252 Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 são formados números de 4 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade dele ser:

a) par? b) ímpar?

Solução

Seja Ω o conjunto dos números de 4 algarismos distintos formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Então:

$$\#\Omega = A_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 120.$$

a) Seja B o evento, o número escolhido é par. Então:

$- - - 2 \quad A_{4,3} = 24$

$- - - 4 \quad A_{4,3} = 24$

$$\#B = 24 + 24 = 48. \text{ Logo } P(B) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}.$$

b) Seja C o evento, o número é ímpar. Como $C = B^C$, segue-se que:

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

E.253 Em uma urna existem 6 bolinhas numeradas, de 1 a 6. Uma a uma elas são extraídas, sem reposição. Qual a probabilidade de que a seqüência de números observados seja crescente?

E.254 Oito pessoas, (entre elas Pedro e Silvia) são dispostos ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de:

a) Pedro e Silvia ficarem juntos?
b) Pedro e Silvia ficarem separados?

E.255 Nove livros são colocados ao acaso numa estante. Qual a probabilidade de que 3 livros determinados fiquem juntos?

E.256 Uma loteria consta de 1 000 números, de 1 a 1 000. Dez números são sorteados ao acaso, sem reposição, e ao 1º número sorteado, corresponde o 1º prêmio, ao 2º número sorteado, o 2º prêmio e assim por diante, até o 10º número sorteado. Se uma pessoa é portadora do bilhete nº 341, qual a probabilidade dela ganhar:

a) o 1º prêmio? b) o 4º prêmio? c) o 10º prêmio?

E.257 Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos 5 caras e 5 coroas?

E.258 Um adivinho diz ser capaz de ler o pensamento de outra pessoa. É feita a seguinte experiência: seis cartas (numeradas de 1 a 6) são dadas à pessoa, que concentra sua atenção em duas delas. O adivinho terá que descobrir essas duas cartas. Se o adivinho estiver apenas "chutando", qual a probabilidade dele acertar as duas cartas, nas quais a outra pessoa concentra a atenção?

E.259 (Problema clássico do aniversário).
Em um grupo de n pessoas, qual a probabilidade de que pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia? (Supondo que nenhuma tenha nascido em ano bisexto).

Solução

Sejam os eventos:

A: pelo menos duas entre as *n* pessoas fazem aniversário no mesmo dia.
A^C: todas as *n* pessoas fazem aniversário em dias distintos.

Cada data de aniversário pode ser considerada como um número entre 1 e 365 (inclusive). Logo, o espaço amostral é constituído de todas as n-uplas ordenadas onde cada elemento pode ser um inteiro de 1 a 365 (inclusive). Logo, pelo *Princípio Fundamental da Contagem*:

$\#\Omega = 365^n$.

O evento A^C consiste em todas as enuplas ordenadas, de *elementos distintos*, onde cada elemento pode ser um inteiro e 1 a 365. Logo

$$\#A^C = A_{365,n} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1).$$

Logo $P(A^C) = \dfrac{\#A^C}{\#\Omega} = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$.

Portanto, $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$.

Eis os valores de P(A) para alguns valores de n.

n = 20, P(A) = 0,41
n = 40, P(A) = 0,89
n = 50, P(A) = 0,97 (quase certeza).

E.260 Uma urna contém seis bolinhas numeradas de 1 a 6. Quatro bolinhas são extraídas ao acaso sucessivamente, com reposição. Qual a probabilidade de que todas assinalem números diferentes?

E.261 Cinco algarismos são escolhidos ao acaso, com reposição, entre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Qual a probabilidade dos cinco algarismos serem diferentes?

E.262 Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Duas bolas são extraídas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas? b) ambas serem brancas?

E.263 Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 2 pretas. Duas bolas são extraídas ao acaso, e com reposição. Qual a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas?
b) nenhuma ser branca?
c) nenhuma ser preta?

E.264 De um baralho de 52 cartas, três são extraídas sucessivamente ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as cartas sejam de "paus"?

E.265 De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de observarmos:

a) dois ases? b) um ás e um rei (sem levar em conta a ordem)?

E.266 Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 7 brancas. Duas bolas são extraídas sucessivamente ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) ambas serem brancas? b) ambas serem vermelhas?
c) uma vermelha, outra branca (sem levar em conta a ordem)?

E.267 De um lote de 200 peças sendo 180 boas e 20 defeituosas, 10 peças são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) as 10 peças serem boas?
b) as 10 peças serem defeituosas?
c) 5 peças serem boas e 5 serem defeituosas?

E.268 Um lote contém 60 lâmpadas sendo 50 boas e 10 defeituosas. 5 lâmpadas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) todas serem boas?
b) todas serem defeituosas?
c) 2 serem boas e 3 defeituosas?
d) pelo menos uma ser defeituosa?

E.269 Em uma loja existem 100 camisas, sendo 80 da marca A. Se 5 camisas forem escolhidas ao acaso, sem reposição, qual a probabilidade de 4 serem da marca A?

E.270 De um baralho de 52 cartas, 5 são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) de saírem os 4 reis?
b) de não sair nenhum rei?
c) de sair ao menos um rei?

E.271 De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que pelo menos uma seja de copas?

E.272 De um grupo de 10 pessoas, entre elas Regina, cinco são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que Regina compareça entre as cinco?

E.273 De 100.000 declarações de imposto de renda (entre as quais a do Sr. K) que chegam a um órgão fiscal, 10.000 são escolhidas ao acaso e analisadas detalhadamente. Qual a probabilidade da declaração do Sr. K ser analisada detalhadamente?

E.274 Entre 100 pessoas, uma única é portadora de uma moléstia. 10 pessoas entre as 100 são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade da pessoa portadora da moléstia estar entre as 10?

E.275 Um grupo é constituído de 6 homens e 4 mulheres. Três pessoas são selecionadas ao acaso, sem reposição; qual a probabilidade de que ao menos duas sejam homens?

Solução

Consideremos o espaço amostral Ω constituído de todas as combinações das 10 pessoas, tomadas 3 a 3. Logo,

$$\#\Omega = \binom{10}{3} = 120.$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, tais que em cada uma existem dois ou três homens. Isto é:

$$\#A = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 80.$$

Logo $P(A) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

E.276 Entre 10 meninas, 4 têm olhos azuis. Três meninas são escolhidas ao acaso, sem reposição; qual a probabilidade de pelo menos duas terem olhos azuis?

E.277 Uma urna contém 4 bolas brancas, 2 vermelhas e 3 azuis. Cinco bolas são selecionadas ao acaso, com reposição. Qual a probabilidade de que 2 sejam brancas, uma vermelha e 2 azuis?

E.278 De um baralho de 52 cartas, 3 são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as 3 sejam do mesmo naipe?

Solução

Seja o espaço amostral Ω constituído das combinações das 52 cartas tomadas 3 a 3. Então:

$$\#\Omega = \binom{52}{3} = 22\,100.$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, nas quais as 3 cartas são do mesmo naipe. Logo,

$\# A = 4 \cdot \binom{13}{3} = 1\,144.$

Portanto, $P(A) = \frac{1\,144}{22\,100} = \frac{22}{425}.$

E.279 De um baralho de 52 cartas, duas são selecionadas ao acaso e sem reposição; qual a probabilidade de que seus naipes sejam diferentes?

E.280 De um baralho de 52 cartas, duas são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de observarmos dois reis ou duas cartas de copas?

E.281 Um grupo é constituído de 10 pessoas, entre elas Jonas e Cesar. O grupo é disposto ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de que haja exatamente 4 pessoas entre Jonas e Cesar?

E.282 Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode andar uma unidade de cada vez, para cima ou para a direita. Se ele andar 10 unidades, qual a probabilidade de chegar no ponto P(7, 3)?

X. PROBABILIDADE CONDICIONAL

103. Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos A e B. Com o símbolo $P(A|B)$ indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A|B)$ é a *probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido.* Quando calculamos $P(A|B)$ tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual, queremos calcular a probabilidade de A.

104. Exemplos

1º) Consideremos o lançamento de um dado e observação da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

Sejam os eventos:

A: ocorre um número ímpar
B: ocorre um número maior ou igual a 2.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$

$P(A|B)$ será então a probabilidade de ocorrer número ímpar no novo espaço amostral reduzido.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$

Atribuindo $\frac{1}{5}$ para a probabilidade de cada evento elementar de B, o evento ocorrer número ímpar no espaço amostral "reduzido" será $\{3, 5\}$ e portanto

$$P(A|B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

2º) Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela.

	solteiro (S)	casado (C)	desquitado (D)	viuvo (V)	
Masculino (M)	50	60	40	30	180
Feminino (F)	150	40	10	20	220
	200	100	50	50	

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Sejam os eventos:

S: a pessoa é solteira,
M: a pessoa é do sexo masculino.

$P(S|M)$ significa a probabilidade da pessoa ser solteira, no novo espaço amostral reduzido, das 180 pessoas do sexo masculino. Ora, como existem 50 solteiros nesse novo espaço amostral:

$$P(S|M) = \frac{50}{180} = \frac{5}{18}.$$

Sejam ainda os eventos:

F: a pessoa escolhida é do sexo feminino.
D: a pessoa escolhida é desquitada,

então $P(F|D)$ significa a probabilidade da pessoa escolhida ser do sexo feminino, no novo espaço amostral reduzido das 50 pessoas desquitadas. Ora, como existem

10 pessoas do sexo feminino nesse novo espaço amostral,

$$P(F|D) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

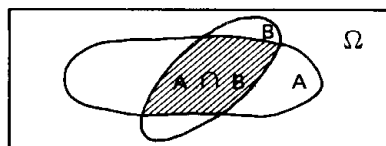
Notemos que $P(F|D) \neq P(D|F)$ pois um cálculo simples nos mostra que

$$P(D|F) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}.$$

105. Observação

Para definirmos formalmente $P(A|B)$, vamos recorrer novamente ao conceito de freqüência relativa.

Se um experimento aleatório for repetido N vezes, sejam n_A, n_B e $n_{A \cap B}$ o número de vezes que ocorrem A, B e $A \cap B$, respectivamente. Notemos que a freqüência relativa de A, naqueles resultados que B ocorre é $\frac{n_{A \cap B}}{n_B}$, isto é, a freqüência relativa de A condicionada a ocorrência de B.

$$\frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} = \frac{f_{A \cap B}}{f_B}$$

onde $f_{A \cap B}$ e f_B representam as freqüências relativas da ocorrência de $A \cap B$ e de B respectivamente. Quando N é grande, $f_{A \cap B}$ é "próxima" de $P(A \cap B)$ e f_B é próxima de $P(B)$. Isto sugere então a definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0.$$

Em resumo, temos dois modos de calcular $P(A|B)$:

1º) Considerando que a probabilidade do evento A será calculada em relação ao espaço amostral "reduzido" B.

2º) Empregando a fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

onde tanto $P(A \cap B)$ como $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original Ω.

106. Exemplo

Dois dados d_1 e d_2 são lançados. Consideremos o espaço amostral:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) & (5, 1) & (6, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) & (5, 2) & (6, 2) \\ (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) & (4, 3) & (5, 3) & (6, 3) \\ (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) & (5, 4) & (6, 4) \\ (1, 5) & (2, 5) & (3, 5) & (4, 5) & (5, 5) & (6, 5) \\ (1, 6) & (2, 6) & (3, 6) & (4, 6) & (5, 6) & (6, 6) \end{matrix} \right\}$$

Sejam os eventos:

A: o dado d_1 apresenta resultado 2,

B: a soma dos pontos nos dois dados é 6.

Calculemos $P(A|B)$

1º modo: O novo espaço amostral reduzido é:

$B = \{(1, 5), \mathbf{(2, 4)}, (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

Nesse novo espaço amostral a probabilidade de A (d_1 apresentar o resultado 2) é $\frac{1}{5}$. Logo

$$P(A|B) = \frac{1}{5}.$$

2º modo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Temos:

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$ $\quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ $\quad P(B) = \frac{5}{36}.$

$A \cap B = \{(2, 4)\}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$

$$\text{Logo } P(A|B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}.$$

EXERCÍCIOS

E.283 Um dado é lançado e o número da face de cima é observado.

a) Se o resultado obtido for par, qual a probabilidade dele ser maior ou igual a 5?
b) Se o resultado obtido for maior ou igual a 5, qual a probabilidade dele ser par?
c) Se o resultado obtido for ímpar, qual a probabilidade dele ser menor que 3?
d) Se o resultado obtido for menor que 3, qual a probabilidade dele ser ímpar?

E.284 Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade do número ser par?
b) Qual a probabilidade do número ser par, dado que ele é menor que 50?
c) Qual a probabilidade do número ser divisível por 5, dado que é par?

E.285 Dois dados d_1 e d_2 são lançados.

a) Qual a probabilidade da soma dos pontos ser 6, se a face observada em d_1 foi 2?
b) Qual a probabilidade do dado d_1 apresentar face 2, se a soma dos pontos foi 6?
c) Qual a probabilidade da soma dos pontos ser menor que 7, sabendo-se que em ao menos um dado apareceu o resultado 2?
d) Qual a probabilidade da soma dos pontos ser menor ou igual a 6, se a soma dos pontos nos dois dados foi menor ou igual a 4?
e) Qual a probabilidade do máximo dos números observados ser 5, se a soma dos pontos foi menor ou igual a 9?

E.286 Considere um tetraedro, como um dado, com 4 faces numeradas de 1 a 4. Dois tetraedros t_1 e t_2 são lançados sobre um plano e observam-se os números das faces nas quais se apoiam os tetraedros. Se a soma dos pontos obtidos for maior que 5, qual a probabilidade de que o número observado em t_1 seja:

a) 4? b) 3?

E.287 Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos, e dos olhos de cada moça, segundo a tabela

		olhos	
		azuis	castanhos
cabelos	loira	17	9
	morena	4	14
	ruiva	3	3

a) Se você marca um encontro com uma dessas garotas, escolhida ao acaso, qual a probabilidade dela ser
1) loira? 2) morena de olhos azuis? 3) morena ou ter olhos azuis?
b) Está chovendo quando você encontra a garota. Seus cabelos estão completamente cobertos, mas você percebe que ela tem olhos castanhos. Qual a probabilidade de que ela seja morena?

E.288 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observa-se que seu número está entre 4 e 10 (4 e 10 inclusive). Qual a probabilidade de que o número da carta seja 6?

E.289 Uma comissão de 3 pessoas é formada escolhendo-se ao acaso entre Antônio, Benedito, César, Denise e Elisabete. Se Denise não pertence a comissão, qual a probabilidade de César pertencer?

E.290 Se A e B são eventos, e $P(A) > 0$, prove que

a) $P(A|A) = 1$
b) $P(A^C|A) = 0$
c) Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(B|A) = 0$
d) $P(A \cup B|A) = 1$
e) Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A|A \cup B) = \dfrac{P(A)}{P(A) + P(B)}$

XI. TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

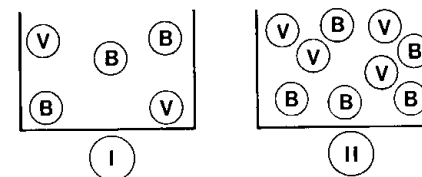
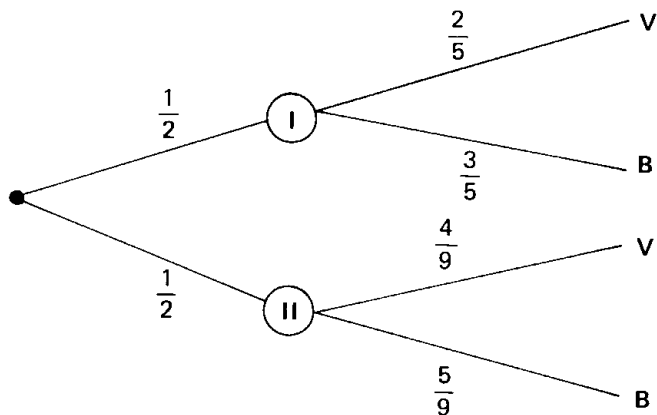
107. Uma conseqüência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Isto é, *a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos* $(P(A \cap B))$ *é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.*

108. Exemplo 1

Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, a urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

Os dados do problema podem ser colocados num diagrama de árvore. Como cada urna é selecionada ao acaso, a probabilidade é $\frac{1}{2}$ para cada urna I e II (escrevemos $\frac{1}{2}$ em cada ramo que parte do ponto inicial para a urna obtida).

Dada a urna escolhida, escrevemos as probabilidades condicionais de extrairmos da mesma uma bola de determinada cor. Tais probabilidades são colocadas nos ramos que partem de cada urna para cada resultado do 2º experimento (extração da bola).

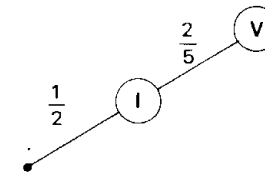
Sejam $\begin{cases} U_I, \text{ o evento escolher urna I} \\ V, \text{ o evento escolher bola vermelha.} \end{cases}$

Estamos interessados no evento $U_I \cap V$. Logo, pelo teorema da multiplicação:

$$P(U_I \cap V) = P(U_I) \cdot P(V \mid U_I)$$

ora, $P(U_I) = \frac{1}{2}$, $P(V \mid U_I) = \frac{2}{5}$.

Logo, $P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de U_I e V é o produto das probabilidades que aparecem nos ramos da árvore onde estão situados I e V.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Analogamente, indicando por U_{II} o evento urna II e por B o evento bola branca, teremos:

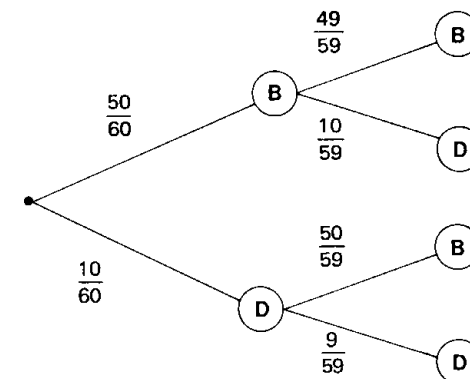
$$P(U_I \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

$$P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$P(U_{II} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

109. Exemplo 2

Um lote contém 50 peças boas (B) e 10 defeituosas (D). Uma peça é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra peça é escolhida ao acaso.

O diagrama de árvore correspondente é:

Pelo diagrama, concluímos que, a probabilidade de ambas serem defeituosas é:

$$\frac{10}{60} \cdot \frac{9}{59} = \frac{90}{3\,540} = \frac{3}{118}.$$

XII. TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

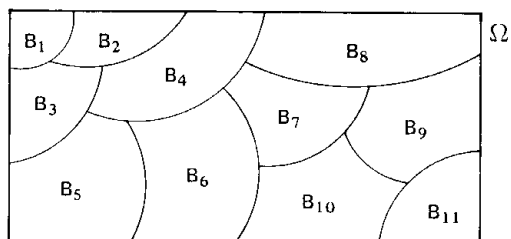
110. Inicialmente, consideremos n eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Diremos que eles formam uma partição do espaço amostral Ω, quando

I) $P(B_k) > 0 \quad \forall k$

II) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$

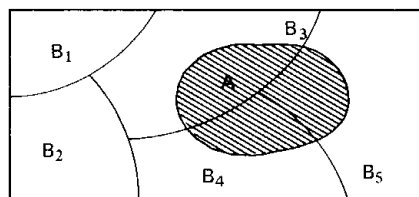
III) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

Isto é, os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são dois a dois mutuamente exclusivos e exaustivos (sua união é Ω).

111. Ilustração para $n = 11$

Seja Ω um espaço amostral, A um evento qualquer de Ω e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma partição de Ω.

É válida a seguinte relação:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A).$$

112. A figura abaixo ilustra o fato para $n = 5$.

nesse caso:

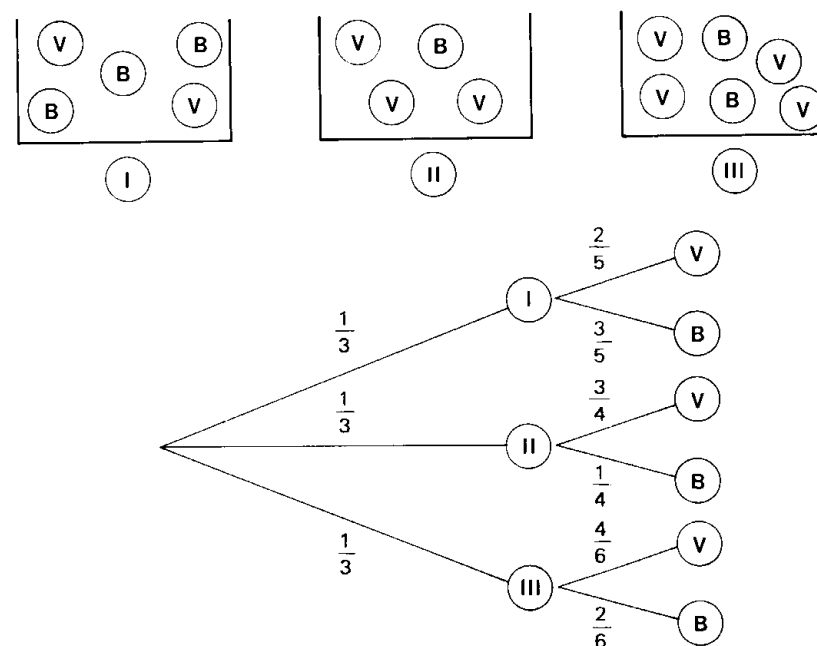
$$A = \underbrace{(B_1 \cap A)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B_2 \cap A)}_{\emptyset} \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A).$$

Notemos que $(B_1 \cap A)$; $(B_2 \cap A)$ ...; $(B_n \cap A)$ são dois a dois mutuamente exclusivos, portanto

$$\boxed{P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A).}$$

Este resultado é conhecido como *teorema da probabilidade total*. Ele é utilizado quando P(A) é difícil de ser calculada diretamente, porém, simples se for usada a relação acima.

113. Exemplo 1

Uma urna I tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 brancas (B); outra urna II tem 3 bolas vermelhas e uma branca e a urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade da bola ser vermelha?

Notemos que os eventos, U_I (sair urna I), U_{II} (sair urna II) e U_{III} (sair urna III) determinam uma partição de Ω. Seja V o evento sair bola vermelha. Então pelo *teorema da probabilidade total* $P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V)$.

Porém pelo teorema da multiplicação:

$$P(U_I \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

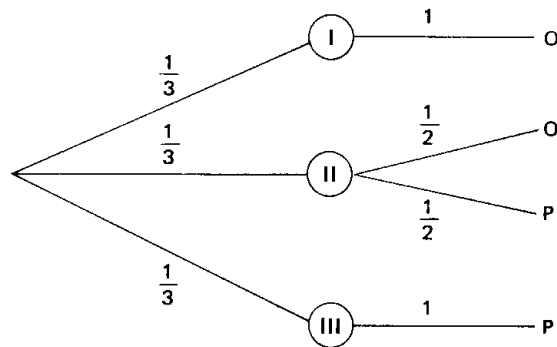
$$P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(U_{III} \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}.$$

Segue-se então, que:

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}.$$

114. Exemplo 2 (Problema da moeda de Bertrand).

Existem três caixas idênticas. A 1ª contém duas moedas de ouro, a 2ª contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a 3ª, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

É claro que o problema pode ser formulado da seguinte forma: "Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I (pois a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro).

Sejam os eventos:

C_I : a caixa sorteada é a 1ª

C_{II} : a caixa sorteada é a 2ª

C_{III}: a caixa sorteada é a 3ª

O : a moeda sorteada é de ouro.

temos:

$$P(C_I \cap O) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(O) = P(C_I \cap O) + P(C_2 \cap O) + P(C_3 \cap O)$$

$$P(O) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + O = \frac{1}{2}$$

$$P(C_I | O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Isto é, a probabilidade buscada é $\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS

E.291 Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 pretas. Outra urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola também ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos:

a) urna I e bola vermelha?
b) urna I e bola preta?
c) urna II e bola vermelha?
d) urna II e bola preta?

E.292 Uma urna tem 8 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra é escolhida, também ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a 1ª bola ser vermelha e a 2ª branca?
b) a 1ª bola ser branca e a 2ª vermelha?
c) a 1ª e a 2ª serem vermelhas ?

E.293 O mês de Outubro tem 31 dias. Numa certa localidade, chove 5 dias, no mês de Outubro. Qual a probabilidade de não chover nos dias 1º e 2 de Outubro?

E.294 Seja P_X a probabilidade que uma pessoa com X anos sobreviva mais um ano e nP_X a probabilidade de que uma pessoa com x anos sobreviva mais n anos (n inteiro positivo)

a) O que significa P_{40}?
b) O que significa $2P_{40}$?
c) Mostre que $2P_{40} = P_{40} \cdot P_{41}$.

E.295 A urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 2 bolas vermelhas e 6 brancas e a urna III tem 5 bolas vermelhas, 2 brancas e 3 amarelas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola, também ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser:

a) vermelha? b) branca? c) amarela?

E.296 Em um lote da fábrica A existem 18 peças boas e 2 defeituosas. Em outro lote da fábrica B, existem 24 peças boas e 6 defeituosas, e em outro lote da fábrica C, existem 38 peças boas e 2 defeituosas. Um dos 3 lotes é sorteado ao acaso e dele é extraída uma peça ao acaso. Qual a probabilidade da peça ser:

a) boa? b) defeituosa?

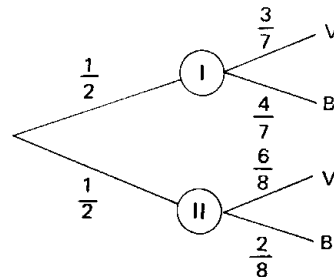
E.297 A urna I tem 2 bolas vermelhas e 3 amarelas e a urna II tem 4 bolas vermelhas, 5 amarelas e 2 brancas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna I e colocada na urna II, em seguida uma bola é escolhida da urna II ao acaso. Qual a probabilidade dessa segunda bola ser:

a) vermelha? b) amarela? c) branca?

E.298 Sejam A e B dois eventos tais que: $P(A \cap B) = 0{,}8$ e $P(A \cap B^C) = 0{,}1$, calcule P(A).

E.299 Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola, também ao acaso.

a) Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?
b) Qual a probabilidade de observarmos bola vermelha?
c) Se a bola observada foi vermelha, qual a probabilidade que tenha vindo da urna I?

Solução (diagrama da árvore)

a) $P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

b) $P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{33}{56}$

c) estamos interessados em $P(U_I \mid V)$. Por definição

$$P(U_I \mid V) = \frac{P(U_I \cap V)}{P(V)}$$

usando os resultados dos itens a e b, $P(U_I \mid V) = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{33}{56}} = \frac{4}{11}$.

E.300 Uma caixa contém 3 moedas M_I, M_{II} e M_{III}. A M_I é honesta, a M_{II} tem duas caras e a M_{III} é viciada de tal modo que caras são duas vezes mais prováveis que coroas. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

a) Qual a probabilidade de observamos moeda M_I e cara?
b) Qual a probabilidade de observamos cara?
c) Se o resultado final foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido M_I.

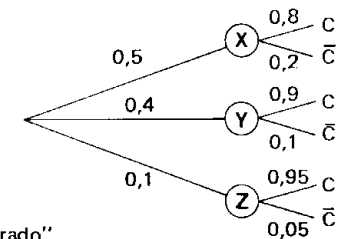
E.301 Duas máquinas A e B produzem peças idênticas, sendo que a produção da máquina A é o triplo da produção da máquina B. A máquina A produz 80% de peças boas e a máquina B produz 90%. Uma peça é selecionada ao acaso do estoque e verifica-se que é boa. Qual a probabilidade de que tenha sido fabricada pela máquina A?

E.302 Uma clínica especializada trata de 3 tipos de moléstias; X, Y e Z. 50% dos que procuram a clínica são portadores de X, 40% são portadores de Y e 10% de Z. As probabilidades de cura, nesta clínica, são:

moléstia X: 0,8
moléstia Y: 0,9
moléstia Z: 0,95.

Um enfermo saiu curado da clínica. Qual a probabilidade de que ele sofria a moléstia Y?

Solução

Façamos um diagrama de árvore:

onde:

C: indica o evento "o enfermo fica curado"
C̄: indica o evento "o enfermo não fica curado"

1ª Etapa: $P(Y \text{ e } C) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$
2ª Etapa: $P(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}855$
3ª Etapa: $P(Y \mid C) = \frac{P(Y \text{ e } C)}{P(C)}$

Logo $P(Y \mid C) = \frac{0{,}36}{0{,}855} = 0{,}421 = 42{,}1\%$

que é a probabilidade procurada.

E.303 No exercício anterior, se o enfermo saiu curado, qual a probabilidade de que ele sofria:

a) da moléstia X? b) da moléstia Z?

E.304 Uma certa moléstia A é detectada através de um exame de sangue. Entre as pessoas que efetivamente possuem a moléstia A, 80% delas têm a moléstia detectada pelo exame de sangue. Entre as pessoas que não possuem a moléstia A, 5% delas têm a moléstia detectada (erroneamente) pelo exame de sangue. Numa cidade, 2% das pessoas têm a moléstia A. Uma pessoa da cidade foi submetida ao citado exame de sangue que a acusou como portadora da moléstia A. Qual a probabilidade dessa pessoa estar efetivamente atacada pela moléstia?

E.305 Em uma população, o número de homens é igual ao de mulheres. 5% dos homens são daltônicos e 0,25% das mulheres são daltônicas. Uma pessoa é selecionada ao acaso e verifica-se que é daltônica. Qual a probabilidade de que ela seja mulher?

XIII. INDEPENDÊNCIA DE DOIS EVENTOS

115. Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, diremos que *A independe de B* se:

$$P(A|B) = P(A)$$

isto é, A independe de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.

Observemos que se *A independe de B* ($P(A) > 0$) então *B independe de A* pois:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

116. Em resumo, se A independe de B, então B independe de A e além disso;

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{P(B)} = P(A) \cdot P(B)$$

Isto sugere a definição:

Dois eventos A e B são chamados independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

117. Exemplo 1

Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos:

A: ocorrem pelo menos duas caras.
B: ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Temos:

$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$.

$A = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{(K, K, K), (C, C, C)\}$, $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$A \cap B = \{(K, K, K)\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Logo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, com $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$.

Portanto A e B são independentes.

118. Observação

a) Se A e B *não são independentes* eles são chamados *dependentes*.

b) Prova-se que (ver exercícios) se A e B são independentes, então:

A e B^C são independentes.
A^C e B são independentes.
A^C e B^C são independentes.

119. Exemplo 2

Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade da 1ª atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade da 2ª atingir o alvo é $P(B) = \frac{2}{3}$.

Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo,
b) ao menos um atingir o alvo.

Temos:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

XIV. INDEPENDÊNCIA DE TRÊS OU MAIS EVENTOS

120. Consideremos 3 eventos A, B e C do mesmo espaço amostral Ω. Diremos que *A, B e C são independentes,* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Generalizando, diremos que n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se:

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \qquad \forall i, j \quad i \neq j$

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \quad \forall \ i, j, k, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k$

....

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$

121. Observação

Em geral, para mais do que 2 eventos não precisamos verificar todas essas condições, pois do ponto de vista prático, nós *admitimos a independência* (baseados nas particularidades do experimento) e usamos esse fato para calcularmos, por exemplo, $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$ como $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

122. Exemplo 1

Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observamos cara nos 10 lançamentos.

Sejam os eventos:

A_1: ocorre cara no 1º lançamento

A_2: ocorre cara no 2º lançamento

$\vdots$

A_{10}: ocorre cara no 10º lançamento.

Como o resultado de cada lançamento, não é afetado pelos outros, podemos admitir $A_1, A_2, ..., A_{10}$ como eventos independentes. Portanto

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_{10}).$$

Como:

$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_{10}) = \frac{1}{2}$ (a probabilidade de ocorrer cara em qualquer lançamento e $\frac{1}{2}$)

segue-se que:

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_{10}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2}}_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

123. Exemplo 2

Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que a face "2" apareça pelo menos uma vez nos 5 lançamentos?

Sejam os eventos:

A_1: ocorre um número diferente de 2 no 1º lançamento

A_2: ocorre um número diferente de 2 no 2º lançamento

$\vdots$

A_5: ocorre um número diferente de 2 no 5º lançamento.

Admitindo $A_1, A_2, ..., A_5$ independentes e tendo em conta que $P(A_i) = \frac{5}{6} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, segue-se que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Então $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ é a probabilidade de *não observarmos* o "2" em *nenhum lançamento*. Ora, aparecer o "2" pelo menos uma vez, é o evento complementar do evento não comparecer nenhuma vez. Logo a probabilidade desejada é:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

EXERCÍCIOS

E.306 Se A e B são eventos independentes, prove que A^C e B também o são. Isto é, provar que a implicação abaixo é verdadeira:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow P(A^C \cap B) = P(A^C) \cdot P(B).$

Demonstração

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ (teorema da probabilidade total)

Logo:

$P(B) = P(A) \cdot P(B) + P(A^C \cap B)$

$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$P(A^C \cap B) = P(B) [1 - P(A)] \qquad P(A^C \cap B) = P(B) \cdot P(A^C).$

E.307 Prove (usando o exercício 306) que se A e B são independentes:

a) A e B^C são independentes

b) A^C e B^C são independentes.

E.308 Prove que, se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então A e B são dependentes.

E.309 Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que ela pouse num homem $(P(H))$?
b) Qual a probabilidade de que ela pouse numa mulher $(P(M))$?
c) Os eventos H e M são independentes?

E.310 De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Sejam os eventos:

A: a carta é de copas
B: a carta é um rei
C: a carta é um rei ou uma dama.

Quais dos pares de eventos são independentes?

a) A e B b) A e C c) B e C.

E.311 As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são, $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) ambos resolvam o problema?
b) ao menos um resolva o problema?
c) nenhum resolva o problema?
d) A resolva o problema mas B não?
e) B resolva o problema mas A não?

E.312 A probabilidade de um certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de uma certa data é 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?
b) Ao menos um deles sobreviver mais 10 anos, a partir daquela data?

E.313 A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{2}$, a de que outro aluno B o resolva é $P(B) = \frac{1}{3}$ e a de que um terceiro aluno C o resolva é $P(C) = \frac{1}{4}$. Qual a probabilidade de que:

a) os três resolvam o problema?
b) ao menos um resolva o problema?

Solução

Assumindo que A, B e C são eventos independentes, temos

a) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

b) Queremos calcular $P(A \cup B \cup C)$

temos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Logo

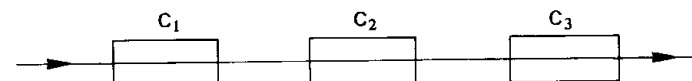
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

E.314 Luís tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de convidar Alice para um passeio num domingo. A probabilidade de que César a convide é $\frac{2}{5}$ e a de Olavo é $\frac{1}{2}$. Qual a probabilidade de que:

a) os três a convidem para o passeio?
b) ao menos um a convide para o passeio?
c) nenhum a convide para o passeio?

E.315 Em um circuito elétrico, 3 componentes são ligados em série e trabalham independentemente um do outro. As probabilidades de falharem o 1º, 2º e 3º componentes valem respectivamente $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}1$, e $p_3 = 0{,}2$. Qual a probabilidade de que não passe corrente pelo circuito?

E.316 *(Problema proposto por Chevalier De Meré a Pascal)*

O que é mais provável:

a) obter pelo menos um "6" jogando um dado 4 vezes ou
b) obter um par de 6 pelo menos uma vez jogando dois dados simultaneamente 24 vezes?

E.317 Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de:

a) observamos 10 caras?
b) observamos 10 coroas?
c) observamos 4 caras e 6 coroas?

XV. LEI BINOMIAL DA PROBABILIDADE

124. Ensaios de Bernoulli

Consideremos um experimento que consiste em uma seqüência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a *probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores.* Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados, um deles que chamaremos *Sucesso* (S) e outro que chamaremos de *Fracasso* (F). A probabilidade de ocorrer *sucesso* em cada ensaio é sempre p, e consequentemente, a de *fracasso* é $q = 1 - p$. Tal tipo de experimento recebe o nome de *ensaios de Bernoulli* (pois os primeiros estudos a esse respeito devem-se a James Bernoulli, Matemático do século XVII).

125. Exemplos de Ensaios de Bernoulli

1) Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamemos *Sucesso* o resultado *cara* e *Fracasso* o resultado *coroa.* Em cada ensaio, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

2) Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 brancas. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna; este procedimento é repetido 8 vezes. Cada extração é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: bola vermelha ou bola branca. Chamemos *Sucesso* o resultado *bola vermelha* e *Fracasso* o resultado *bola branca.* Em cada caso $p = \frac{4}{10}$ e $q = \frac{6}{10}$.

3) Um dado é lançado 100 vezes. Consideremos os dois resultados: sair o número "5" ou sair um número diferente de "5". Cada lançamento é um ensaio de Bernoulli. Chamemos *Sucesso* o resultado *sair o "5"* e *Fracasso* o resultado *não sair o "5".* Em cada ensaio $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$.

126. Observação

Os nomes *Sucesso* e *Fracasso* não tem aqui o significado que lhes damos na linguagem cotidiana. São nomes que servem apenas para designar os dois resultados de cada ensaio. Assim, no *exemplo 1,* poderíamos chamar *Sucesso* o resultado *coroa* e *Fracasso* o resultado *cara.*

No exemplo 1, sejam os eventos:

A_1: ocorre cara no 1º lançamento, $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

A_2: ocorre cara no 2º lançamento, $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

⋮

A_5: ocorre cara no 5º lançamento, $P(A_5) = \frac{1}{2}$.

Então, o evento $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5$ corresponde ao evento *sair cara nos 5 lançamentos,* que é

$$\{(K, K, K, K, K)\}$$

Como os 5 eventos são independentes,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Se quisermos a probabilidade de obter duas caras e em seguida três coroas, então o evento que nos interessa é:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C$ que é $\{(K, K, C\ C, C)\}$

Logo,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

É fácil perceber neste exemplo, que a probabilidade de qualquer quíntupla ordenada de caras e coroas é $\frac{1}{32}$, pois, em qualquer quíntupla ordenada (_ , _ , _ , _ , _) a probabilidade P {(_ , _ , _ , _ , _)} será

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Suponhamos agora, o evento sair exatamente uma cara. Isto é

$$\{(K, C, C, C, C), (C, K, C, C, C), (C, C, K, C, C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)\}$$

Portanto a probabilidade deste evento é:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$

Se quisermos a probabilidade do evento sair exatamente duas caras, teremos que calcular o *número* de quíntuplas ordenadas, onde existem duas caras (K) e três coroas (C). Ora, a Análise Combinatória nos ensina que este *número* é o número de permutações de 5 elementos, com dois repetidos (iguais a K) e três repetidos (iguais a C), isto é,

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Logo a probabilidade desejada é $\frac{10}{32}$.

127. Distribuição Binomial

Os exemplos anteriores podem ser generalizados, segundo o que se conhece por *distribuição binomial.*

Consideremos então uma seqüência de n ensaios de Bernoulli. Seja p a probabilidade de *Sucesso* em cada ensaio e q a probabilidade de *Fracasso.*

Queremos calcular *a probabilidade P_k, da ocorrência de exatamente K sucessos, nos n ensaios.* É evidente que $K \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Sejam os eventos:

A_i: ocorre Sucesso no i'ésimo ensaio, $P(A_i) = p$.
A_i^C: ocorre Fracasso no i'ésimo ensaio, $P(A_i^C) = q$.
$\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

O evento "ocorrem exatamente K sucessos nos n ensaios" é formado por *todas as enuplas ordenadas onde existem K Sucessos (S) e n – K Fracassos (F).* O número de enuplas ordenadas nestas condições é:

$$P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!} = \binom{n}{K}.$$

A probabilidade de cada enupla ordenada de K Sucessos (S) e (n – K) Fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot ... \cdot p}_{K \text{ vezes}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{(n-K) \text{ vezes}} = p^K \cdot q^{n-K}$$

Pois, qualquer enupla ordenada deste tipo é a *intersecção* de K eventos do tipo A_i, e (n – K) eventos do tipo A_j^C, e como esses eventos são independentes, a probabilidade da *intersecção* dos mesmos, é o *produto* das probabilidades de

cada um, isto é $p^K \cdot q^{n-K}$. Por exemplo, a enupla $(\underbrace{S, S, S, ..., S}_{K}, \underbrace{F, F, ..., F}_{n-K})$ é igual a intersecção

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap A_{K+1}^C \cap ... \cap A_n^C$$

cuja probabilidade é $p^K \cdot q^{n-K}$.

Logo, se cada enupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ enuplas desse tipo, a probabilidade P_K *de exatamente K sucessos nos n ensaios* será:

$$\boxed{P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}}$$

128. Exemplo 1

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como *Sucesso* o resultado "bola vermelha", e *Fracasso* "bola branca". Então:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad n = 5.$$

Estamos interessados na probabilidade P_3. Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{720}{3\,125}$$

$P_3 = 0{,}2304$.

129. Exemplo 2

Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A?

Em cada escolha de uma pessoa, consideremos os resultados:

Sucesso: a pessoa tem carro marca A.
Fracasso: a pessoa não tem carro marca A.

Então: $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 30$.

Estamos interessados em P_5. Temos:

$$P_5 = \binom{30}{5} (0{,}1)^5 \cdot (0{,}9)^{25} \cong 0{,}102.$$

130. Observação

O problema de obter K sucessos em n ensaios de Bernoulli pode ser encarado como um problema, cujo espaço amostral é $\Omega = \{0, 1, 2, ..., n\}$ isto é, cada elemento de Ω é o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli e a distribuição de probabilidade é dada por

$$P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}.$$

Tal distribuição é chamada *binomial,* pois cada probabilidade P_K, é dada pelo *termo geral do Binômio de Newton* $(p + q)^n$.

EXERCÍCIOS

E.318 Considere uma distribuição binomial com $n = 10$ e $p = 0{,}4$. Calcule:

a) P_0; b) P_4; c) P_6; d) P_8.

E.319 Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente duas caras?

E.320 Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que o "4" apareça exatamente 3 vezes.

E.321 Um estudante tem probabilidade $p = 0{,}8$ de acertar cada problema que tenta resolver. Numa prova de 8 problemas, qual a probabilidade de que ele acerte exatamente 6.

E.322 Uma pessoa tem probabilidade 0,2 de acertar num alvo toda vez que atira. Supondo que as vezes que ela atira, são ensaios independentes, qual a probabilidade dela acertar no alvo exatamente 4 vezes, se ela dá 8 tiros?

E.323 A probabilidade de que um homem de 45 anos sobreviva mais 20 anos é 0,6. De um grupo de 5 homens, com 45 anos qual a probabilidade de que exatamente 4 cheguem aos 65 anos?

E.324 Um exame consta de 20 questões tipo Certo ou Errado. Se o aluno "chutar" todas as respostas, qual a probabilidade dele acertar exatamente 10 questões? (Indique somente os cálculos).

E.325 Uma moeda é lançada 2n vezes. Qual a probabilidade de observarmos n caras e n coroas?

E.326 Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos ao menos uma cara?

Solução

Temos: $n = 6$ $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

Estamos interessados em calcular: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$.

Ora, como:

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 - P_0$

Logo, basta calcularmos P_0.

Temos:

$$P_0 = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Logo a probabilidade desejada é $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

E.327 Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos pelo menos 8 caras?

E.328 Um time de futebol tem probabilidade $p = \frac{3}{5}$ de vencer, todas as vezes que joga. Se disputar 5 partidas, qual a probabilidade de que vença ao menos uma?

E.329 Uma moeda é lançada 9 vezes. Qual a probabilidade de observarmos no máximo 3 caras?

Solução

Temos: $n = 9$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

Estamos interessados em calcular: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ então

$$P_0 = \binom{9}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512},$$

$$P_1 = \binom{9}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{512}.$$

$$P_2 = \binom{9}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{36}{512}.$$

$$P_3 = \binom{9}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{84}{512}.$$

Logo, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{130}{512} = 0{,}254$.

E.330 Em 4 ensaios de Bernoulli, a probabilidade de Sucesso em cada um é p = 0,4. Qual a probabilidade de observarmos no mínimo 3 sucessos?

E.331 Um teste tipo Certo ou Errado consta de 6 questões. Se um aluno "chutar" as respostas ao acaso, qual a probabilidade de que ele acerte mais do que 2 testes?

E.332 Numa cidade, 30% da população é favorável ao candidato A. Se 10 eleitores forem selecionados ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de que mais da metade deles seja favorável ao candidato A? (Indique os cálculos).

E.333 Um casal planeja ter 5 filhos. Admitindo que sejam igualmente prováveis os resultados: filho do sexo masculino e filho do sexo feminino, qual a probabilidade do casal ter:

a) 5 filhos do sexo masculino?
b) exatamente 3 filhos do sexo masculino?
c) no máximo um filho do sexo masculino?
d) o 5º filho do sexo masculino, dado que os outros 4 são do sexo feminino?

RESPOSTAS

CAPÍTULO I

E.1 40
E.2 30
E.3 7 200
E.4 56
E.5 600
E.7 2^{20} = 1 048 576 formas.
E.8 26^6 = 308 915 776, sim.
E.9 243
E.10 125
E.11 200
E.12 32
E.13 6^6
E.15 a) 8
b) 510
E.17 64
E.19 $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1) \cdot (d + 1)$
E.20 28
E.21 r^n
E.23 AA, ABAA, ABAB, ABB, BAA, BABA, BABB, BB.
E.24 40
E.25 (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a) (d, b), (d, c).
E.26 a) 120 b) 5 040 c) 20 d) 132
E.27 6 840
E.28 30
E.30 240
E.31 60
E.32 720
E.34 a) m^r b) $\frac{m!}{(m-r)!}$
E.35 360
E.36 72
E.38 n!
E.39 504
E.41 280
E.42 125
E.43 3 537
E.44 18
E.45 72
E.46 60
E.47 16
E.49 58º
E.50 $13 \cdot 3^{13}$
E.51 7! = 5 040
E.53 480
E.54 10! e 7!
E.55 288
E.56 8!
E.57 7!
E.59 a) 17 280
b) 5 760
E.60 28 800
E.61 480
E.62 $4! \cdot 12!$
E.64 11!
E.65 3
E.66 (m – 1)! m!
E.69 6
E.70 {7}
E.71 {7}
E.75 a) $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$, b) $(n!)^2$.
E.79 a) 15, b) 15, c) 1.
E.80 {7, 8}; {7, 9}; {7, 0}; {8, 9}; {8, 0}; {9, 0}.

E.81 1

E.82 $p = 0$ ou $p = 1$.

E.83 504

E.86 $C_{52,4}$

E.87 10

E.88 10

E.89 848

E.90 48

E.92 $\binom{9}{4} = 126$.

E.93 56

E.94 140

E.95 a) $\binom{15}{10}$ b) $\binom{15}{5}$ c) $5 \cdot \binom{15}{9}$

d) $\binom{20}{10} - \binom{15}{10}$

E.96 112

E.97 112

E.99 a) 165, b) 60.

E.100 $\binom{50}{4} \cdot \binom{10}{4}$.

E.101 $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{4} = 350$.

E.102 4 512

E.103 a) 3 b) 10 c) 15

E.104 2 080

E.105 140

E.106 630

E.107 10

E.108 $\binom{20}{2} - \binom{6}{2} + 1$.

E.109 a) 28 b) 56 c) 28

E.111 a) 4 b) 3.

E.112 100.

E.113 $n(n - 3)$.

E.114 35

E.115 $\binom{n}{3} - 9$.

E.116 969

E.118 $\binom{18}{3} - \binom{10}{3} - \binom{8}{3}$

CAPÍTULO II

E.151 a) $x^3 + 9x^2b + 27xb^2 + 27b^3$

b) $1 - 5x^2 + 10x^4 - 10x^6 + 5x^8 - x^{10}$

c) $x^2 - 4x\sqrt{xy} + 6xy - 4y\sqrt{xy} + y^2$

d) $\text{sen}^4\theta + 4\,\text{sen}^3\theta\cos\theta + 6\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + 4\,\text{sen}\,\theta\cos^3\theta + \cos^4\theta$

e) $243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5$

E.119 $(C_{p,2}) \cdot (C_{q,2})$.

E.120 28 800

E.121 $\binom{64}{2} \cdot \binom{62}{2} = 3\,812\,256$

E.123 $\binom{p+1}{q}$.

E.124 495

E.125 60

E.126 $\frac{8!}{2!\,2!}$

E.127 831 600 minutos ou 577 dias e meio.

E.128 $\frac{20!}{10!\,10!}$.

E.129 210

E.130 10

E.132 10

E.133 40

E.134 210

E.135 $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$

E.136 $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{5}$

E.137 252

E.138 182

E.139 $\frac{52!}{(13!)^4}$

E.140 $\frac{20!}{(5!)^4}$

E.141 2^{10}

E.142 280

E.143 126

E.144 $\frac{15!}{(5!)^3 \cdot 6}$

E.145 a) 28 b) 286 c) 1001.

E.146 126

E.147 21

E.148 1 287 formas.

E.149 35.

E.150 6.

E.152 $10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$

E.153 $x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + a^7$.

E.154 $a = 1$ e $b = 3$.

E.155 a) 8 b) 11 c) $n + 1$.

E.156 a) 51

b) x^{50}; $x^{49} \cdot a$; $x^{48} \cdot a^2$; $x^{47} \cdot a^3$.

E.157 $\binom{1000}{99} x^{901} \cdot y^{99}$

E.158 $\binom{100}{0} x^{100}$; $\binom{100}{1} x^{99}y$;

$\binom{100}{2} x^{98} \cdot y^2$.

E.159 60

E.160 $30\,618\,x^4y^5$.

E.161 80

E.162 28

E.163 $5\,005\,a^{12} \cdot x^3$.

E.164 $-455\,x^3a^6$.

E.165 $\binom{100}{40}$

E.166 6

E.167 $\binom{2n}{n}$

E.168 280

E.169 153

E.170 não.

E.171 $2n(n - 1)$

E.172 17

E.174 a) 1,02 b) 0,94.

E.176 a) 5^{10} b) 6^8

E.177 7^4

E.178 a) 0 b) 16

E.179 5.

E.180 24

E.181 a) F b) V c) V d) V e) V f) V

E.183 16

E.184 a) 1024 b) 1023 c) 1013

E.185 10

E.186 $2^n - 1$

E.188 $2^n - 1$

E.189 2

E.198 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

E.202 5

E.203 $x = 1$ ou $x = 5$.

E.204 $p = 5$.

E.205 a) $\binom{12}{6}$ b) $\binom{15}{7}$ e $\binom{15}{8}$

E.206 $252\,x^2y^{10} \cdot \sqrt{x}$.

E.207 12 e 12.

E.208 210

E.210 243

CAPÍTULO III

E.211 $\Omega = \{P, R, O, B, A, I, L, D, E\}$

E.212 $\Omega = \{V, B, A\}$

E.213 $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$

E.214 $\Omega = \{2_e, 2_c, 2_p, 2_o, \ldots, 8_e, 8_c, 8_p, 8_o, \ldots, A_e, A_c, A_p, A_o\}$
onde os índices e, c, p, o indicam respectivamente espadas, copas, paus e ouros

E.215 $\Omega = \{(V, V), (V, B), (B, V), (B, B)\}$

E.216 $\Omega = \{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B) (C, B, A)\}$

E.217 $\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (MFF), (FMM), (FMF), (FFM), (FFF)\}$
onde M indica o sexo *masculino* e F, *feminino*.

E.219 $\Omega = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$

E.220 $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 364, 365\}$.

E.221 a) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$

c) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

d) $\{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

e) $\{10, 20, 30\}$

f) $\{3, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30\}$
g) $\Omega - \{6, 12, 18, 24, 30\}$

E.222 a) {(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}
b) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}
c) {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)}
d) {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}
e) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}

E.223 a) {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}
b) {(K, 2), (K, 4), (K, 6), (C, 2), (C, 4), (C, 6)}
c) {(K, 3), (C, 3)}
d) {(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 2), (C, 4), (C, 6)}
e) $\varnothing$, B e C são mutuamente exclusivos.
f) {(K, 3)}
g) {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)}
h) {(K, 1), (K, 2), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 4), (C, 5), (C, 6)}

E.224 a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
b) {(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)}
c) {(1, 1)}
d) {(1, 1), (2, 4)}
e) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)}
f) {(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)}

E.225 a) {(I, V), (I, B)}
b) {(II, V), (II, B)}
c) {(I, V), (II, V)}
d) {(I, B), (II, B)}
e) Ω
f) {(I, V)}
g) {(I, V), (II, V)}

E.226 a) Ω = {(S, S, S), (S, S, N), (S, N, S), (S, N, N), (N, S, S), (N, S, N), (N, N, S), (N, N, N)}
onde *S* representa respostas *sim* e *N*, resposta *não*.
b) A = {(S, S, N), (S, N, S), (S, N, N), (N, S, S), (N, S, N), (N, N, S), (N, N, N)}

E.227 a) $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}3$
b) 0,6 c) 0,4 d) 0,4 e) 0,7 ; 0,3 f) 0,3; 0,7

E.228 A distribuição é correta.

E.229 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$.

E.231 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{12}$

E.232 a) $\frac{1}{55}$ b) $\frac{3}{55}$; $\frac{7}{55}$ c) $\frac{13}{55}$ d) $\frac{42}{55}$

E.233 b) 0,042 c) 0,013; 0,987.

E.236 a) 0,4 b) 0,8 c) 0, 8.

E.238 a) 0,5 b) 0,8 c) 0,8.

E.239 a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{13}$ e) $\frac{12}{13}$

E.240 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

E.241 a) $\frac{11}{100}$ b) $\frac{2}{25}$ c) $\frac{1}{2}$

E.242 $\frac{1}{2}$

E.244 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{3}$

E.245 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{36}$ e) 1 f) $\frac{11}{36}$

E.246 a) 0,4 b) 0,7 c) 0,6.

E.248 a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{10}$

E.240 a) $\frac{21}{50}$ b) $\frac{1}{5}$

E.250 a) $\frac{7}{100}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{10}$

E.251 a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{7}{8}$

E.253 $\frac{1}{720}$

E.254 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$

E.255 $\frac{1}{12}$

E.256 a) $\frac{1}{1000}$ b) $\frac{1}{1000}$ c) $\frac{1}{1000}$

E.257 $\dfrac{\frac{10!}{5!\,5!}}{2^{10}}$

E.258 $\frac{1}{15}$

E.260 $\frac{5}{18}$

E.261 $\frac{30 \cdot 240}{10^5}$

E.262 a) $\frac{25}{64}$ b) $\frac{9}{64}$

E.263 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{49}{100}$ c) $\frac{16}{25}$

E.264 $\frac{11}{850}$

E.265 a) $\frac{1}{221}$ b) $\frac{8}{663}$

E.266 a) $\frac{7}{22}$ b) $\frac{5}{33}$ c) $\frac{35}{66}$

E.267 a) $\frac{\binom{180}{10}}{\binom{200}{10}}$ b) $\frac{\binom{20}{10}}{\binom{200}{10}}$ c) $\frac{\binom{180}{5} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{200}{10}}$

E.268 a) $\frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}}$ b) $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{60}{5}}$ c) $\frac{\binom{50}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{60}{5}}$ d) $1 - \frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}}$

E.269 $\frac{\binom{80}{4} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{100}{5}}$

E.270 a) $\frac{48}{\binom{52}{5}}$ b) $\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$ c) $1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$

E.271 $\frac{15}{34}$

E.272 $\frac{\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}}$

E.273 $\frac{1}{10}$

E.274 $\frac{1}{10}$

E.276 $\frac{1}{3}$

E.277 $\frac{2}{7}$

E.279 $\frac{13}{17}$

E.280 $\frac{14}{221}$

E.281 $\frac{1}{9}$

E.282 $\frac{15}{128}$

E.283 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

E.284 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{24}{49}$ c) $\frac{1}{5}$

E.285 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{11}$ d) 1 e) $\frac{4}{15}$

E.286 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$

E.287 a) $\frac{13}{25}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{19}{25}$ b) $\frac{7}{13}$

E.288 $\frac{1}{7}$

E.289 $\frac{3}{4}$

E.291 a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{8}$

E.292 a) $\frac{4}{35}$ b) $\frac{4}{35}$ c) $\frac{4}{15}$

E.293 $\frac{65}{93}$

E.294 a) probabilidade de uma pessoa de 40 anos sobreviver mais um ano.
b) probabilidade de uma pessoa de 40 anos sobreviver mais 2 anos.

E.295 a) $\frac{11}{28}$ b) $\frac{71}{140}$ c) $\frac{1}{10}$

E.296 a) $\frac{53}{60}$ b) $\frac{7}{60}$

E.297 a) $\frac{11}{30}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{1}{6}$

E.298 0,9

E.300 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{13}{18}$ c) $\frac{3}{13}$

E.301 $\frac{8}{11}$

E.303 a) 46,7% b) 11,1%
OBS.: as respostas foram arredondadas para uma casa decimal.
E.304 24,6%
E.305 4,8%
E.309 a) 0,4 b) 0,6 c) não, pois $P(H \cap M) = 0 \neq P(H) \cdot P(M)$.

E.310 a) A e B são idenpendentes.
b) A e C são independentes.
c) B e C são dependentes.

E.311 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{11}{15}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{2}{5}$

E.312 a) 0,2 b) 0,7

E.314 a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{31}{40}$ c) $\frac{9}{40}$

E.315 0,352
E.316 o evento enunciado em (a) é mais provável; sua probabilidade é aproximadamente 0,5177 e a do evento enunciado em (b) é 0,4914.

E.317 a) $\frac{1}{1024}$ b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{105}{512}$

E.318 a) 0,006 b) 0,251 c) 0,111 d) 0,011
E.319 0,234

E.320 $\frac{125}{3\,888}$

E.321 0,294
E.322 0,046
E.323 0,259

E.324 $\binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cong 0{,}176$.

E.325 $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

E.327 $\frac{7}{128}$

E.328 $\frac{3093}{3125}$

E.330 0,180

E.331 $\frac{21}{32}$

E.332 $\sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} (0,3)^x \cdot (0,7)^{10-x}$

E.333 a) $\frac{1}{32}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{1}{2}$

TESTES

ANÁLISE COMBINATÓRIA

TE.1 (PUC-70) Num banco de automóvel o assento pode ocupar 6 posições diferentes e o encosto 5 posições, independente da posição do assento. Combinando assento e encosto, este banco assume:

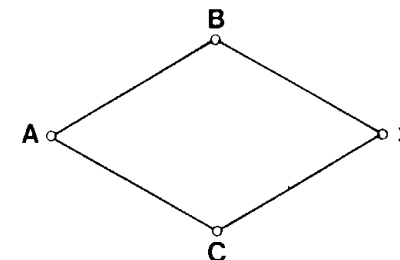
a) 6 posições diferentes
b) 30 posições diferentes
c) 90 posições diferentes
d) 180 posições diferentes
e) 720 posições diferentes

TE.2 (CESCEA-73) Um automóvel é oferecido pelo fabricante em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores 2 000 cc e 4 000 cc. Sabendo-se que os automóveis são fabricados nas versões "standard", "luxo" e "super-luxo", quantas são as alternativas para o comprador?

a) 14 b) 21 c) 42 d) 12

TE.3 (GV-71) O sistema telefônico de São Paulo utiliza sete (7) dígitos para designar os diversos telefones. Supondo que o primeiro dígito seja sempre dois (2) e que o dígito zero (0) não seja utilizado para designar as estações (2º e 3º dígitos), quantos números de telefones diferentes poderemos ter:

a) 80 000 b) 800 000 c) 810 000 d) 900 000
e) nenhuma das anteriores.

TE.4 (GV-72) Existem apenas dois modos de se atingir uma cidade x partindo de uma outra A. Uma delas é ir até uma cidade intermediária B e de lá atingir x, e a outra é ir até C e de lá chegar a x. (Veja esquema ao lado). Existem 10 estradas ligando A e B; 12 ligando B à x; 5 ligando A à C; 8 ligando C à x; nenhuma ligação entre B e C e nenhuma ligação direta entre A e x. O número de percursos diferentes que se pode fazer para partindo de A atingir x pela primeira vez é:

a) 35 b) 4 800 c) 300 d) 4 e) 160

TE.5 Existem 4 estradas que unem as cidades A e B e 5 estradas que unem as cidades B e C. Há também 2 estradas que unem A a C, não passando por B. Usando estas estradas, o número de viagens possíveis, partindo de A, passando por C e voltando para A é

a) 22 b) 44 c) 484 d) nenhuma das anteriores.

TE.6 (CESGRANRIO-77) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele se possa apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que ele precisa é:

a) 24 b) 11 c) 12 d) 10 e) 8

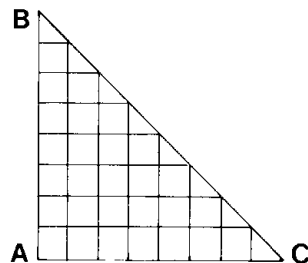
TE.7 (CESGRANRIO-76) Em um computador digital um "bit" é um dos algarismos 0 ou 1 e uma "palavra" é uma sucessão de "bits". O número de "palavras" distintas, de 32 "bits", é

a) $2(2^{32} - 1)$ b) 2^{32} c) $\frac{32 \times 31}{2}$ d) 32^2 e) 2×32

TE.8 (FEI-67) Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras se pode ir do ponto A até a reta BC?

a) 8 b) 64

c) 256 d) 1 024

e) nenhuma das anteriores.

TE.9 (MACK-74) Os ingleses têm o costume de dar alguns nomes para as crianças. O número de maneiras diferentes de chamar-se uma criança, se existem 300 nomes diferentes e se uma criança não pode ter mais do que 3 nomes, todos diferentes entre si, é:

a) 10^6 b) 300^2 c) 300^3 d) 26 820 600 e) 6 744 700

TE.10 (GV-71) Uma loteria (semelhante à loteria esportiva), apresenta 10 jogos, cada um com 4 possíveis resultados. Usando a aproximação $2^{10} \cong 10^3$, então o número total de resultados possíveis será:

a) menos que 100 000 b) entre 100 000 e 1 000 000
c) entre 1 000 000 e 10 000 000 d) entre 10 000 000 e 100 000 000
e) nenhuma das anteriores.

TE.11 (GV-76) As peças de um jogo de dominó são pequenos retângulos de madeira, divididos em duas metades. Em cada metade está marcado um certo número de pontos. As peças são feitas de forma que os totais de pontos que aparecem em cada uma das metades são perfeitamente permutáveis girando-se a peça de meia volta. Por exemplo, a peça (2,5) é também a peça (5,2). Se em cada metade podem aparecer desde nenhum ponto até **n** pontos, então o número de peças diferentes é:

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) $\frac{n(n-1)}{2}$ c) $(n+1)!$ d) $\frac{(n+1)!}{2}$ e) $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

TE.12 (USP-69) Uma bandeira é formada de 7 listras que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

a) 128 b) 192 c) 35 d) 2 187 e) 210

TE.13 (ITA-72) Sejam A um conjunto finito com m elementos e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. O número de todas as funções definidas em I_n com valores em A é:

a) C_m^n b) $m \cdot n$ c) n^m d) m^n
e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.14 (MACK-77) Uma equipe brasileira de automobilismo tem 4 pilotos de diferentes nacionalidades, sendo um único brasileiro. Ela dispõe de 4 carros, de cores distintas, dos quais somente um foi fabricado no Brasil. Sabendo-se que obrigatoriamente ela deve inscrever, em cada corrida, pelo menos um piloto ou um carro brasileiros, o número de inscrições diferentes que ela pode fazer para uma corrida onde irá participar com 3 carros, é:

a) 15 b) 30 c) 45 d) 90 e) não sei

TE.15 (GV-74) Uma moto tem combustível suficiente para somente três voltas num circuito. Pedro, Manoel e Antônio disputam, através de lançamento de uma moeda, a oportunidade de dar cada volta, do seguinte modo:

(I) o lançamento da moeda é efetuado antes de cada volta;
(II) se coroa, a vez é de Manoel;
(III) se cara, a vez é de Pedro;
(IV) se a mesma face ocorrer consecutivamente, a vez é de Antônio.

Pode-se dizer, então, que Antônio dará:

a) pelo menos uma volta
b) no máximo uma volta
c) pelo menos uma volta, se a primeira for dada por Manoel
d) no máximo duas voltas, se a primeira for dada por Pedro
e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.16 (CESCEA-73) Suponha que no início de um jogo você tenha Cr$ 2,00 e que só possa jogar enquanto tiver dinheiro. Supondo que em cada jogada você perde ou ganha Cr$ 1,00, ao final de três jogadas os possíveis resultados são:

a) Cr$ 2,00, Cr$ 3,00 ou Cr$ 5,00
b) Cr$ 1,00, Cr$ 3,00 ou Cr$ 4,00
c) Cr$ 0,00, Cr$ 2,00 ou Cr$ 4,00
d) Cr$ 1,00, Cr$ 3,00 ou Cr$ 5,00

TE.17 (GV-75) Um homem tem oportunidade de jogar no máximo 5 vezes na roleta. Em cada jogada ele ganha ou perde um cruzeiro. Começará com um cruzeiro e parará de jogar antes de cinco vezes, se perder todo seu dinheiro ou se ganhar três cruzeiros, isto é, se tiver quatro cruzeiros. O número de maneiras em que o jogo poderá se desenrolar é:

a) 5 b) 3 c) 11 d) 12 e) 10

TE.18 (MACK-69) Num concurso com 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais que um prêmio, um primeiro e um segundo prêmios poderão ser distribuídos de

a) 144 maneiras distintas b) 121 maneiras distintas
c) 132 maneiras distintas d) 242 maneiras distintas
e) nenhuma das respostas acima é correta.

TE.19 (MACK-74) Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. O número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras é:

a) 1 680 b) 8! c) $8 \cdot 4!$ d) $\frac{8!}{4}$ e) 32

TE.20 (GV-74) Existem 7 voluntários para exercerem 4 funções distintas. Qualquer um deles está habilitado para exercer qualquer dessas funções. Portanto, pode-se escolher quaisquer 4 dentre os 7 voluntários e atribuir a cada um deles uma das 4 funções. Quantas possibilidades existem para essa atribuição?

a) 20 b) 360 c) 625 d) 840 e) 5 040

TE.21 (CESCEM-77) As placas dos automóveis são formadas por duas letras seguidas de 4 algarismos. O número de placas que podem ser formadas com as letras A e B e os algarismos pares, sem repetir nenhum algarismo, é

a) $4 \cdot C_{5;4}$ b) $4 \cdot A_{5;4}$ c) $2 \cdot C_{5;4}$ d) $2 \cdot A_{5;4}$ e) $2 \cdot P_4$

TE.22 (CESCEA-74) De quantas maneiras um técnico de futebol pode formar um quadro de 11 jogadores escolhidos de 22, dos quais 3 são goleiros e onde só o goleiro tem posição fixa?

a) $3 \cdot C_{19,10}$ b) $A_{22,11}$ c) $C_{22,11}$ d) $3 \cdot A_{19,10}$ e) $3 \cdot C_{21,10}$

TE.23 (COMSART-73) De quantas maneiras três casais podem ocupar 6 cadeiras, dispostas em fila, de tal forma que as duas das extremidades sejam ocupadas por homens?

a) $A_{3,2} \cdot P_4$ b) $A_{10,3} + A_{15,2}$ c) $2 \cdot A_{3,2} \cdot P_4$ d) $3 \cdot A_{3,2} \cdot P_4$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.24 (ITA-77) Consideremos m elementos distintos. Destaquemos k dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles m elementos tomados n a n ($A_{m,n}$) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contiguos e em qualquer ordem de colocação, r ($r < n$) dos k elementos destacados?

a) $(n - r - 1)\, A_{k,r}\, A_{m-k,\,n-r}$ b) $(n - r + 1)\, A_{k,r}\, A_{m-r,\,n-k}$
c) $(n - r - 1)\, A_{k,r}\, A_{m-r,\,n-k}$ d) $(n - r + 1)\, A_{k,r}\, A_{m-k,\,n-r}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.25 (CESCEA-67) No jogo de loto, de uma urna contendo 90 pedras numeradas de 1 a 90, quatro pedras são retiradas **sucessivamente**; o número de extrações possíveis tal que a terceira pedra seja 80 será:

a) $A_{90,4}$ b) P_4 c) P_{80} d) $A_{89,3}$ e) $C_{89,3}$

TE.26 (CESCEA-76) O total de números múltiplos de 4, com quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, é:

a) 24 b) 48 c) 54 d) 96 e) 120

TE.27 (CESCEA-77) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

a) 120 b) 60 c) 30 d) 180 e) 90

TE.28 (MACK-75) Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 e sem repetição, pode-se escrever x números maiores que 2 500. O valor de x é:

a) 78 b) 120 c) 162 d) 198 e) 240

TE.29 (CESCEM-76) Com os algarismos 0, 1, 2, 5 e 6, sem os repetir, quantos números compreendidos entre 100 e 1 000 poderemos formar?

a) 10 b) 24 c) 48 d) 60 e) 120

TE.30 (ITA-76) No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados?
Obs.: Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

a) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ b) $2^5 \cdot 3 \cdot 7$
c) $2^4 \cdot 3^3$ d) $2^5 \cdot 3^2$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.31 (MACK-74) A quantidade de números de 3 algarismos que tem pelo menos 2 algarismos repetidos é:

a) 38 b) 252 c) 300 d) 414 e) 454

TE.32 (CESCEM-76) O número de funções injetoras definidas em $A = \{1; 2; 3\}$ com valores em $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ é:

a) 10 b) 15 c) 60 d) 125 e) 243

TE.33 (FEI-71) O número de anagramas formadas com as letras da palavra **república**: nas quais as vogais se mantêm nas respectivas posições é:

a) 5! b) 5! 4! c) 9! d) 0! e) 4!

TE.34 (GV-74) Uma palavra é formada por N vogais e N consoantes. De quantos modos distintos pode-se permutar as letras desta palavra, de modo que não apareçam juntas duas vogais ou duas consoantes?

a) $(N!)^2$ b) $(N!)^2 \cdot 2$ c) $(2N)!$ d) $(2N)! \cdot 2$
e) nenhuma das respostas anteriores

TE.35 (PUC-77) Designando-se por A, B, C, D, E e F, seis cidades, o número de maneiras que permitem a ida de A até F, passando por todas as demais cidades é:

a) 18 b) 22 c) 26 d) 24 e) 20

TE.36 (ITA-71) Dispomos de seis cores diferentes.
Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

a) 30 b) 12 c) 36 d) 18
e) nenhuma das respostas anteriores

TE.37 (PUC-74) Se $(n-6)! = 720$, então:

a) $n = 12$ b) $n = 11$ c) $n = 10$ d) $n = 13$ e) $n = 14$

TE.38 (CESCEA-75) Se $\dfrac{A_{n-1,3}}{A_{n,3}} = \dfrac{3}{4}$, então, n é igual a:

a) 11 b) 13 c) 4 d) 5 e) 12

TE.39 (GV-73) A expressão $\dfrac{(K!)^3}{\{(K-1)!\}^2}$ é igual a:

a) K^3 b) $K^3(K-1)!$ c) $\{(K-1)!\}^2$ d) $(K!)^2$ e) $K^3\{(K-1)!\}^2$

TE.40 (PUC-73) Simplificando-se $\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$ obtém-se:

a) $(n-r)(n-r+1)$ b) $(n-r)(n-1)$ c) $(n-r)(n+r-1)$ d) $(n-r)(n-r)$
e) $(n+r)(n-r+1)$

TE.41 (CESCEA-69) Se m é um número inteiro não negativo, o valor da expressão $[(m+2)! - (m+1)!]m!$ é:

a) $m!$ b) $(m!)^2$ c) 1 d) $(m+1)!$ e) $[(m+1)!]^2$

TE.42 (GV-75) Sabendo-se que $m \cdot m! = (m+1)! - m!$, pode-se concluir que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + m \cdot m!$ é igual a:

a) $(m+1)!$ b) $(m+1)! - 1$ c) $(2m)! - m!$ d) $(m-1)!$ e) $m! + 1$

TE.43 (GV-73) Uma das afirmações abaixo é falsa. Assinale-a:
Obs.: Considere **n** natural e $n \geqslant 1$

a) $n! - (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-1)$
b) $2(n!) - (n-1)! \cdot (n-1) = (n-1)! - n!$
c) $(n!)^2 = [(n+1)! - n!] \cdot (n-1)!$
d) $(2n+1)! = (2n-1)!(4n^2 + 2n)$
e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

TE.44 (GV-74) $n^2 \cdot (n-2)!\,(1 - \dfrac{1}{n})$ vale, para $n \geqslant 2$.

a) $n!$ b) $(n+1)!$ c) $(n-1)!$ d) $(n+1)!(n-1)!$
e) nenhuma das respostas anteriores

TE.45 (MACK-74) Resolve-se 100 vezes a equação $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = y^2$ no conjunto dos números inteiros, atribuindo valores de 1 a 100 a **n**. As soluções inteiras em y encontram-se no intervalo:

a) $[-8, 0]$ b) $[-4, 1]$ c) $[-2, 6]$ d) $[-3, 5]$ e) $[-5, -1]$

TE.46 (MACK-74) $410 = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n!$ onde a_k é um número natural menor ou igual a k. O valor de a_4 é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

TE.47 (MACK-76) Os números
$(2 + 100!)$, $(3 + 100!)$, $(4 + 100!)$, ..., $(100 + 100!)$

a) são todos divisíveis por 100
b) são todos ímpares
c) são todos inteiros consecutivos não primos
d) formam uma progressão aritmética de razão 100!
e) nenhuma das alternativas anteriores é correta.

TE.48 (CESCEM-77) O valor de p na equação $\dfrac{A_{p,3}}{C_{p,4}} = 12$ é:

a) 12 b) 9 c) 8 d) 6 e) 5

TE.49 (PUC-72) No sistema $\begin{cases} C_{n,p} = 78 \\ A_{n,p} = 156 \end{cases}$ tem-se:

a) $n = 13$ $p = 2$ b) $n = 2$ $p = 12$ c) $n = 3$ $p = 10$ d) $n = 2$ $p = 13$
e) nenhuma das anteriores

TE.50 (PUC-69) Se $A_{m,5} = 180C_{m,3}$ então m é igual a:

a) 10 b) 12 c) 9 d) 10 e) nada disso.

TE.51 (COMSART-73) O número m de objetos de uma coleção que satisfaz à igualdade:

$A_{m,3} - C_{m,3} = 25C_{m,m-1}$

é dado por:

a) 7 b) -4 c) 8 d) 6
e) nenhuma das respostas anteriores

TE.52 (EESCUSP-67) Seja $A_{n,p}$ = número de arranjos de **n** elementos **p** a **p**; seja $C_{n,p}$ = = número de combinações de **n** elementos **p** a **p** Então a fórmula:
$A_{n+1,4} = 20 \cdot C_{n,2}$ é verdadeira para:

a) $n = 5$ b) $n = 7$ c) $n = 4$ d) $n = 36$ e) $n = 17$

TE.53 (CESCEA-71) Seja a, $a \geqslant 6$, a solução da equação $A_{n+2,7} = 10080C_{n+1,7}$. Então, sendo $f(x) = x^2 - 3x + 1$, f(a) vale:

a) 109 b) 72 c) 181 d) 190 e) não sei.

TE.54 (CESCEM-77) Um conjunto A possui **n** elementos, sendo $n \geqslant 4$. O número de subconjuntos de A com 4 elementos é:

a) $\dfrac{n!}{24(n-4)!}$ b) $\dfrac{n!}{(n-4)!}$ c) $(n-4)!$ d) $n!$ e) $4!$

TE.55 (MACK-73) O conjunto A tem 45 subconjuntos de 2 elementos. O número de elementos de A é:

a) 10 b) 15 c) 45 d) 90
e) impossível de determinar com a informação dada

TE.56 (CESCEM-75) O sr. Moreira, dirigindo-se ao trabalho, vai encontrando seus amigos e levando-os juntos no seu carro. Ao todo, leva 5 amigos, dos quais apenas 3 são conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertam-se as mãos dois a dois. O número total de apertos de mão é:

a) $C_{5,2} - C_{3,2}$ b) $A_{5,2} - A_{3,2}$ c) $P_5 - P_3$ d) $C_{5,3}$ e) $C_{3,2}$

TE.57 (CESCEA-72) Dez clubes de futebol disputam um campeonato em dois turnos. No final, dois clubes empatam na primeira colocação, havendo mais um jogo de desempate. Quantos jogos foram disputados?

a) 101 b) 91 c) 90 d) 46 e) não sei.

TE.58 (COMSART-73) Considerem-se as combinações de p elementos tomados m a m. A razão entre o número de combinações em que figura um certo elemento e o número de combinações em que esse elemento não figura, é dada por:

a) $\frac{p-m}{m}$ b) $\frac{p}{m-p}$ c) $\frac{m-p}{p}$ d) $\frac{m}{p-m}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.59 (EAESP-GV-77) O número de combinações de 8 elementos, 3 a 3, que contém um determinado elemento é:

a) 21 b) 42 c) 56 d) 7 e) 27

TE.60 (EESCUSP-69) O número de combinações de **n** elementos **p** a **p**, que contêm **K** elementos determinados é:

a) C_{p-K}^{n-K} b) C_K^n c) C_{p-K}^n d) C_p^{n-K} e) C_{K-p}^n

TE.61 (GV-75) Numa assembléia estão presentes 8 deputados do MDB e 3 da ARENA. Sabendo que o presidente da assembléia é do MDB e não participa de comissões, pergunta-se: quantas comissões de 5 elementos ele poderá formar de modo que pelo menos um elemento seja da ARENA?

a) 231 b) 441 c) 321 d) 123 e) 132

TE.62 (GV-74) Deve ser formada uma comissão constituída de 3 estatísticos e 3 economistas, escolhidos entre 7 estatísticos e 6 economistas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formadas essas comissões?

a) 700 b) 25 200 c) 330 d) 650 e) 720

TE.63 (GV-71) Em um congresso há 30 professores de Matemática e 12 de Física. Quantas comissões poderíamos organizar compostas de 3 professores de Matemática e 2 de Física?

a) 5 359 200 b) 60 c) 267 960 d) 129 600 e) 4 060

TE.64 (GV-76) Quer-se criar uma comissão constituída de um presidente e mais 3 membros. Sabendo-se que as escolhas devem ser feitas dentre um grupo de 8 pessoas, quantas comissões diferentes podem ser formadas com essa estrutura?

a) 35 b) 280 c) 70 d) 48 e) 24

TE.65 (CESCEA-69) Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores?

a) 2 400 b) 675 c) 3 136 d) 60 e) 3 631

TE.66 (CESCEM-77) Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente

a) 1 plano b) 2 planos c) 3 planos d) 4 planos e) 5 planos

TE.67 (CESCEM-70) n pontos distintos do plano determinam, no máximo.

a) $\frac{n}{3}$ triângulos b) $\frac{n^2}{3}$ triângulos c) $\frac{n!}{3}$ triângulos

d) $\frac{n!}{(n-3)!}$ triângulos e) $\frac{n!}{3!(n-3)!}$ triângulos

TE.68 (GV-72) Há 12 pontos A, B, C, . . . dados num plano α, sendo que 3 desses pontos nunca pertencem a uma mesma reta. O número de triângulos que contem o ponto A, como um dos vértices, que podemos formar com os 12 pontos é:

a) 165 b) 220 c) 55 d) 66

e) nenhuma das alternativas

TE.69 (GV-75) Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar num ano as mesmas 3 piadas que ele contou em qualquer outro ano. Qual é o mínimo número de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?

a) 5 b) 12 c) 7 d) 32 e) 21

TE.70 (GV-73) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. O número total de modos possíveis pelos quais podemos obter 2 caras e 4 coroas voltadas para cima é:

a) 360 b) 48 c) 30 d) 120 e) 15

TE.71 (GV-70) O número de maneiras que podemos atribuir os nomes de Paulo, Antônio e José a 11 meninos, com a condição de que 3 deles se chamem Paulo, 2 Antônio e 6 José é:

a) 3!2!6!11! b) $\frac{3!2!6!}{11!}$ c) $\binom{11}{3}\binom{11}{2}\binom{11}{6}$

d) 4620 e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.72 (GV-74) 10 alunos devem ser distribuídos em 2 classes, de 7 e 3 lugares respectivamente. De quantas maneiras distintas pode ser feita a distribuição?

a) 720 b) 14400 c) 120 d) 86400

e) nenhuma das respostas anteriores.

TE.73 (MACK-74) Separam-se os números inteiros de 1 a 10 em dois conjuntos de 5 elementos, de modo que 1 e 8 não estejam no mesmo conjunto. Isso pode ser feito de **n** modos distintos. O valor de **n** é:

a) 20 b) 35 c) 70 d) 140 e) 200

TE.74 (ITA-75) O número de soluções inteiras e não negativas da equação:

$x + y + z + t = 7$ é:

a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{11}{4}$ c) $\binom{10}{3}$ d) $\binom{11}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

BINÔMIO DE NEWTON

TE.75 (CESCEM-72) Assinale a resposta certa

a) $(x+1)^{100} = x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1$
b) $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
c) $(x^2-1)^4 = x^8 - 1$
d) $(x^3-1)(x-1)$ é divisível por $(x+1)$
e) $(x^3-1)(x^{11}-1) = (x^{33}-1)$

TE.76 (CESCEA-67) O valor numérico do polinômio:

$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

quando: $x = \dfrac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}$ e $y = \dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$ é igual a:

a) $\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{2^4}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{5}$

TE.77 (GV-75) A expressão $99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1$ é igual a:

a) 99^6 b) 10^9 c) 99^{10} d) 10^{10} e) 99^9

TE.78 (CESCEA-75) Sabendo que

$a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = 1.024$

pode-se dizer que $(a+b)^2$ é igual a:

a) 144 b) 4 c) 36 d) 64 e) 16

TE.79 (FEI-67) Sendo $S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1}2 + \binom{20}{2}2^2 + \dots + \binom{20}{19}2^{19} + \binom{20}{20}2^{20}$ tem-se:

a) $S = 2^{40}$ b) $S = 9^{10}$ c) $S = 20^{20}$ d) $S = 20!$ e) nenhuma das anteriores.

TE.80 (CESCEA-69) Simplificando-se $(1-\sqrt{5})^5 - (1+\sqrt{5})^5$ obtém-se:

a) 160 b) $-160\sqrt{5}$ c) $160\sqrt{5}$ d) $-50\sqrt{5}$ e) $-360\sqrt{5}$

TE.81 (ITA-68) Sejam a e b dois números reais quaisquer e p um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

a) $a = b = 1$ b) a e b são primos entre si c) b = P.A.
d) $x \cdot p = 0$ para todo número real x e) nenhuma das respostas acima.

TE.82 (CESCEA-72) O valor numérico da expressão

$x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n$ para $x = y = 1$ é:

a) 2^{n-1} b) 2^n c) 2^{n+1} d) 2^{2n} e) não sei.

TE.83 (CESCEM-74) A soma $S = (x^3-1)^4 + 4(x^3-1)^3 + 6(x^3-1)^2 + 4(x^3-1) + 1$ é igual a:

a) x^{12} b) $x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$ c) $x^{12} + 4x^9 + 6x^6 + 4x^3$
d) $x^{12} + 1$ e) $x^{12} + x^6 + 1$

TE.84 (GV-73) O valor de $\sum\limits_{x=0}^{n} \binom{n}{x}(2)^x(3)^{n-x}$ é:

a) 6^n b) 5^n c) 1 d) 2^n
e) impossível de se calcular por vias elementares.

TE.85 (ITA-73) Sejam $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in \mathbb{N}$ onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Então $\sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^p(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) nenhuma das respostas anteriores

TE.86 (EPUSP-68) Seja $A_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(2^p3^{n-p} - 4^p)$. Então para todo $n > 0$ tem-se:

a) $A_n = 0$ b) $A_n = 2^n3^n - 4^n$ c) $A_n = n$
d) $A_n = \binom{n}{2}\binom{n}{3} - \binom{n}{4}$ e) nenhuma das anteriores

TE.87 (CESCEM-74) $(p+q)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}p^iq^{n-i}$, $n > 0$

Se $p > 0$, $q > 0$ e $p + q = 1$, podemos concluir que o valor de $\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$

a) só é menor do que 1 para $i < \dfrac{n}{2}$ b) só é maior do que 1 para $i > \dfrac{n}{2}$

c) só é menor do que 1 para $i > \dfrac{n}{2}$ d) só é maior do que 1 para $i < \dfrac{n}{2}$

e) é sempre menor do que 1.

TE.88 (ITA-71) Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{100}x^{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x+9)^{100}$. Nestas condições temos:

a) $a_2 = 50 \times 99 \times 9^{98}$ b) $a_2 = \dfrac{100!}{2!\,98!}$ c) $a_2 = \dfrac{99!}{2!\,98!}$ d) $a_2 = \dfrac{100!\,9^2}{2!\,98!}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TE.89 (CESCEM-73) — Utilizando-se a fórmula do binômio de Newton determinam-se as soluções da equação trigonométrica

$\text{sen}^4 x - 4 \cdot \text{sen}^3 x + 6 \cdot \text{sen}^2 x - 4 \cdot \text{sen}\, x + 1 = 0$

Assinale a assertiva correta

a) $x = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

e) não existe x real que satisfaça a equação

TE.90 (FEIUC-65) — No desenvolvimento do binômio $(x + \frac{1}{x})^m$, o produto do terceiro pelo ante-penúltimo termos vale:

a) $\binom{m}{2} \cdot (m^m - 2)$ b) $\binom{m}{2} \cdot x$ c) $\binom{m}{m-2} \cdot x^2$

d) $\binom{m}{3} \cdot x^2$ e) nenhuma das respostas anteriores

TE.91 (CESCEA-76) Sabendo-se que o quarto termo do desenvolvimento de $(2x - 3y)^n$ é $-1080x^2y^3$, então o 3º termo desse desenvolvimento é:

a) $420x^3y^2$ b) $360x^3y^2$ c) $540x^3y^2$ d) $720x^3y^2$ e) $120x^3y^2$

TE.92 (MACK-74) Os três primeiros coeficientes no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{1}{2x})^n$ estão em progressão aritmética. O valor de **n** é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

TE.93 (GV-73) Os coeficientes do 5º, 6º e 7º termos do desenvolvimento de $(1 + x)^n$ estão em progressão aritmética. Então $(2n - 1)$ vale, para $n \leqslant 10$:

a) 13 b) 19 c) 9 d) 7 e) 15

TE.94 (CESCEA-77) O coeficiente numérico do termo de 4º grau do desenvolvimento do binômio de Newton $(x - 2)^7$ é:

a) $-\frac{7!}{4!3!}$ b) $-\frac{8!}{4!3!}$ c) $\frac{8!}{4!3!}$ d) $\frac{7!}{4!3!}$ e) $\frac{2!}{3!}$

TE.95 (EAESP-GV-77) No desenvolvimento binomial de $(\frac{1}{2}x^2 - y)^{10}$, o coeficiente do termo que contém o fator y^4 é:

a) $\frac{105}{64}$ b) $\frac{105}{32}$ c) 210 d) $\frac{210}{32}$ e) $\frac{105}{124}$

TE.96 (GV-75) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento binomial de $(1 - \frac{2}{3}x)^6$ é:

a) $-\frac{8}{9}$ b) $-\frac{64}{81}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{8}{64}$ e) $\frac{32}{41}$

TE.97 (MACK-76) O coeficiente do termo em x^{-3}, no desenvolvimento de $[\sqrt{x} + \frac{1}{x}]^6$ é:

a) 1 b) 6 c) 10 d) 15 e) inexistente

TE.98 (MACK-76) O coeficiente do termo em x^2 de $(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x})^{12}$ é:

a) 14.080 b) -1 782 c) 924 d) -352 e) nenhum dos anteriores

TE.99 (GV-74) No desenvolvimento de $(x^3 + y^2)^{10}$, o coeficiente do termo médio é:

a) 630 b) 120 c) 252 d) 210 e) nenhuma das anteriores

TE.100 (ITA-73) O coeficiente de $a^{n+1-p}b^p$ no produto de

$a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$ por $(a + b)$, se $k = n$, vale:

a) $\binom{n}{p}$ b) $\binom{n+1}{p}$ c) $\binom{n-1}{p}$ d) $\binom{n+1}{p+1}$

e) nenhuma das anteriores

TE.101 (SANTA CASA-77) No desenvolvimento do binômio $(x + \frac{2}{5x})^8$ o termo independente de x é o:

a) 4º b) 5º c) 6º d) 7º e) 8º

TE.102 (CESCEM-74) O coeficiente do termo independente de x no desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^{517}$ é:

a) $\binom{517}{259}$ b) $\binom{517}{258}$ c) $-\binom{517}{259}$ d) 0 e) 1

TE.103 (FFCLUSP-69) — Qual o valor do termo independente de **x** no desenvolvimento de:

$(x + \frac{1}{x})^6\ (x - \frac{1}{x})^6$

a) -20 b) 8 c) 20 d) 40 e) -40

TE.104 (CESCEM-67) O desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x^2})^n$ tem um termo independente de x.

a) se n é par b) se n é impar c) se n é divisível por 3
d) qualquer que seja n diferente de zero
e) não existe nenhum valor de n nestas condições.

TE.105 (MACK-75) Um dos termos no desenvolvimento de $(x + 3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo se que **a** não depende de **x**, o valor de **a** é:

a) ± 1 b) ± 2 c) ± 3 d) ± 4 e) ± 5

TE.106 (MACK-75) O número de termos racionais no desenvolvimento de $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^{10}$ é:

a) 8; b) 6; c) 4; d) 2; e) 0.

TE.107 (MACK-73) Abaixo estão 5 aproximações do número $(1{,}003)^{20}$. Usando o binômio de Newton é possível determinar a melhor delas, que é

a) 1 b) 1,01 c) 1,03 d) 1,06 e) 1,0003

TE.108 (CESCEA-74) Quando você desenvolve $(5x + 2y)^5$ pelo binômio de Newton aparecem coeficientes numéricos e potenciais de x e y. A soma dos coeficientes numéricos é:

a) 15821 b) 16890 c) 16807 d) 13805 e) não sei.

TE.109 (GV-71) Sabendo-se que a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^p$ é igual a 512, p vale:

a) 8 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

TE.110 (GV-72) A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x - y)^n$ é 256. Então o valor de **n** é:

a) 9 b) 8 c) 7 d) 4
e) nenhuma das alternativas anteriores

TE.111 (ITA-74) A condição para que $\binom{n}{k}$ seja o dobro de $\binom{n}{k-1}$ é que:

a) n + 1 seja múltiplo de 3 b) n seja divisível por 3 c) n - 1 seja par
d) n = 2k e) nenhuma das respostas anteriores

TE.112 (PUC-72) Os valores de m, para os quais $\binom{11}{m-1} = \binom{11}{2m-3}$ são:

a) m = 1, m = 2 b) m = 3, m = 4 c) m = 2, m = 5
d) m = 3, m = 2 e) nenhuma das anteriores.

TE.113 (GV-71) Sendo m, p e q números inteiros e positivos com $q < p$ e $\binom{m}{p+q} = \binom{m}{p-q}$ então:

a) m = p + q b) m = 2 (p + q) c) m = 2p d) p = 2q e) m! = p! + q!

TE.114 (PUC-76) Se $\binom{m-1}{p-1} = 10$ e $\binom{m}{m-p} = 55$, então $\binom{m-1}{p}$ é igual a:

a) 40 b) 45 c) 50 d) 55 e) 60

TE.115 (EAESP-GV-77) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros positivos. O conjunto de todos os $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ e para os quais $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$ é o conjunto:

a) $\{3\}$ b) $\{3, 5\}$ c) $\{3, 4\}$ d) $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\}$
e) $\{3, 4, 5\}$

TE.116 (GV-72) Assinale a afirmação falsa

a) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, quaisquer que sejam os naturais **n** e **p** com $n \geqslant p$

b) $(n + 5)! - n! = 5!$, para todo natural **n**

c) $\frac{(n+1)!}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$, para todo natural **n**

d) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, quaisquer que sejam os naturais **n** e **p**, com $n \geqslant p$

e) $n!\,(n + 1) = (n + 1)!$, para todo natural **n**

TE.117 (CESCEA-75) Uma pessoa possui um certo número m de objetos distintos. Agrupando-os 3 a 3, de modo que cada grupo difira do outro por possuir pelo menos um objeto diferente, obteve o mesmo número de grupos se os juntasse 5 a 5, do mesmo modo. Então $\binom{m}{3}$ é:

a) 35 b) 84 c) 120 d) 56 e) 10

TE.118 (CESCEA-74) Um estádio tem 10 portões; de quantas maneiras diferentes o estádio estará aberto?

a) 1200 b) 1023 c) $C_{10,1}$ d) $C_{10,1} \cdot C_{10,10}$
e) não sei.

TE.119 (CESCEA-67) O somatório $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k}$ é igual à

a) 34572 b) 34571 c) 2048 d) 2047 e) nada disso

TE.120 (MACK-74) O termo independente de x em $(1 + x + \frac{2}{x})^3$ é:

a) 1 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

TE.121 (PUC-76) O coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + x^2 - x^3)^9$, é:

a) $3\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ c) $2\binom{9}{3} + 2\binom{9}{4}$

d) $\binom{9}{3} + 4\binom{9}{4}$ e) $\binom{9}{3} + 3\binom{9}{4}$

TE.122 (ITA-68) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais A expressão $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$ é igual a:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^{n} a_j$ b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$

c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j$ d) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$

e) nenhuma das respostas anteriores.

PROBABILIDADE

TE.123 (CESCEA-76) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento retirada de uma bola, e considere os eventos:

A = {a bola retirada possui um número múltiplo de 2}

B = {a bola retirada possui um número múltiplo de 5}

Então, a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

TE.124 (CESCEM-70) Numa cidade com 1.000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos A e B. É feita uma prévia em que os 1.000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Então a probabilidade de que A ganhe a eleição é:

a) 0,5 b) 1 c) 0,51 d) $\frac{490}{510}$

e) não pode ser calculado porque não é dado quantos eleitores entre os restantes 490 estão ainda indecisos.

TE.125 (CESGRANRIO-77) Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e o mostra a um jogador. A probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

TE.126 (CESCEM-67) Um dado especial em forma de icosaedro, tem suas 20 faces numeradas da seguinte forma: duas das faces têm o número zero; as 18 restantes têm os números, $-9, -8, -7, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 9$. A probabilidade de que, lançando dois destes dados, tenhamos uma soma do número de pontos igual a 2 vale:

a) $\frac{9}{400}$ b) $\frac{18}{400}$ c) $\frac{10}{400}$ d) $\frac{19}{400}$ e) $\frac{2}{20}$

TE.127 (CESCEA-68) Jogando-se 3 dados (ou um dado 3 vezes) qual a probabilidade de obtermos soma menor ou igual a 4?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{54}$

TE.128 (CESCEM-71) Um experimento consiste no lançamento de um cubo cujas faces estão numeradas de 1 a 6. Seja E_i o evento: sair a face que contém o número i (i = 1, 2, ..., 6).

Seja, ainda, $P(E_i)$ a probabilidade de ocorrência do evento E_i, onde $P(E_i) = \frac{i}{21}$

Suponhamos construida a teoria das probabilidades baseada nos três axiomas:

$P(A) \geqslant 0$ (I)

$P(S) = 1$ (II)

$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ (III)

onde A, B e C são eventos do espaço amostral S; B e C são eventos mutuamente exclusivos.

Nestas condições, as probabilidades definidas no experimento anterior;

a) não satisfazem a nenhum dos três axiomas.
b) satisfazem somente ao axioma I.
c) satisfazem somente ao axioma III.
d) satisfazem somente aos axiomas I e II.
e) satisfazem aos axiomas I, II e III.

TE.129 (CESCEM-71) Em um espaço amostral {A; B} as probabilidades P(A) e P(B) valem, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Assinale qual das alternativas seguintes NÃO é verdadeira:

a) $A \cup B = S$ b) $\bar{A} \cup \bar{B} = \varnothing$ c) $A \cap B = \bar{A} \cap \bar{B}$

d) $\bar{A} \cup B = B$ e) $(A \cap B) \cup (A \cup B) = S$

TE.130 (CESCEM-70) Dois indivíduos A e B vão jogar cara ou coroa com uma moeda honesta. Eles combinam lançar a moeda 5 vezes e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta 28 cruzeiros. Feitos os dois primeiros lançamentos, em ambos dos quais A vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico de que forma devem ser repartidos os 56 cruzeiros?

a) metade para cada um
b) 42 para A e 14 para B
c) 49 para A e 7 para B
d) tudo para A
e) nenhuma das anteriores

TE.131 (COMBITEC-COMBIMED-75) Um indivíduo retrógrado guarda seu dinheiro em um açucareiro. Este contém 2 notas de Cr$ 500,00, 4 de Cr$ 100,00, 5 de Cr$ 50,00, 8 de Cr$ 10,00 e 3 de Cr$ 5,00. Se o indivíduo retira do açucareiro duas notas simultaneamente e ao acaso, a probabilidade de que ambas sejam de Cr$ 50,00 é

a) $\frac{1}{44}$ b) $\frac{4}{105}$ c) $\frac{10}{231}$ d) $\frac{5}{22}$ e) $\frac{25}{484}$

TE.132 (CESCEA-71) Tirando-se, ao acaso, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair exatamente 3 valetes é:

a) $\frac{4}{52}$ b) $\frac{4 \cdot C_{48,2}}{C_{52,5}}$ c) $\frac{4 \cdot C_{52,2}}{C_{52,5}}$ d) $\frac{3}{52}$ e) não sei.

TE.133 Em um jogo existem 50 pares de figuras (cada par é formado por duas figuras iguais). O primeiro jogador tira sucessivamente duas cartas. A probabilidade de obter um par é

a) $\frac{1}{100} \times \frac{1}{99}$ b) $\frac{1}{100} + \frac{1}{99}$ c) $\frac{1}{50}$ d) $\frac{1}{99}$

TE.134 (FUVEST-77) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira é:

a) $\frac{72}{81}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{30}{81}$ e) $\frac{45}{81}$

TE.135 (FUVEST-77) Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

a) $\frac{(n-2)!}{n!}$ b) $\frac{(n-3)!}{n!}$ c) $\frac{(n-2)!}{3!\ n!}$ d) $\frac{(n-2)!3!}{n!}$ e) $6(n-2)(n-1)$

TE.136 (SANTA CASA-77) Numa gaveta há 10 pares distintos de meias, mas ambos pés de um dos pares estão rasgados. Tirando-se da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, a probabilidade de tirarmos dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, fazendo 2 retiradas é:

a) $\frac{379}{380}$ b) $\frac{306}{380}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{36}{380}$ e) $\frac{18}{380}$

TE.137 (CESCEM-71) Em uma sala existem 5 crianças: uma brasileira, uma italiana, uma japonesa, uma inglesa e uma francesa. Em uma urna existem 5 bandeiras correspondentes aos países de origem destas crianças: Brasil, Itália, Japão, Inglaterra e França. Uma criança e uma bandeira são selecionadas ao acaso, respectivamente, da sala e da urna. A probabilidade de que a criança sorteada não receba a sua bandeira vale:

a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{5}{25}$ c) $\frac{25}{25}$ d) $\frac{20}{25}$ e) $\frac{5}{20}$

TE.138 (CESCEM-70) De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química sabe-se que:

1. 30 destinam-se à Matemática e destes, 20 são do sexo masculino.
2. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.
3. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nestas condições sorteando-se um aluno ao acaso do grupo total e sabendo-se que é do sexo feminino, a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática vale:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

TE.139 (CESCEM-71) Têm-se duas moedas das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso é lançada. A probabilidade de se obter cara é:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$

c) estritamente maior do que $\frac{1}{2}$, não se podendo afirmar mais nada.

d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{6}$

(CESCEM-71) Sabendo-se que os erros de impressão tipográfica, por página impressa, se distribuem de acordo com as seguintes probabilidades:

Nº de erros por página	probabilidades
0	0,70
1	0,15
2	0,10
3	0,02
4	0,02
5 ou mais	0,01

Nestas condições:

TE.140 A probabilidade de que numa página impressa existam estritamente mais do que três erros tipográficos vale:

a) 0,05 b) 0,03 c) 0,02 d) 0,0003 e) 0,0002

TE.141 A probabilidade de que em duas páginas impressas existam no total exatamente quatro erros tipográficos, vale:

a) 0,0200 b) 0,0270 c) 0,0440 d) 0,4900 e) 0,7000

TE.142 (CESCEM-70) Em cada extração de uma certa loteria, concorrem 40 000 bilhetes. Um indivíduo foi agraciado com 10 000 bilhetes, com os quais ele vai concorrer, podendo, se quizer, dividir os 10 000 bilhetes em duas partes, da maneira que bem entender, para concorrer em duas extrações. Como deve ser feita a divisão para que a probabilidade dele ganhar pelo menos uma vez seja máxima?

a) todos os bilhetes numa extração só
b) 5 000 em uma e 5 000 em outra
c) 2 500 em uma e 7 500 em outra
d) 1 250 em uma e 8.750 em outra
e) nenhuma das anteriores

(CESCEM-68) A tabela abaixo, dá a distribuição de probabilidades dos 4 tipos de sangue de indivíduos numa comunidade.

Tipos sangüíneos / Probabilidade	A	B	AB	O
De ter o tipo especificado	0,20			
De não ter o tipo especificado		0,90	0,95	

TE.143 A probabilidade de que um indivíduo, sorteado ao acaso, desta comunidade tenha o tipo sanguíneo O vale:

a) 0,267 b) 0,65 c) 0,80 d) 0,95
e) nenhuma das anteriores

TE.144 A probabilidade de que dois indivíduos, sorteados ao acaso, desta comunidade, tenham um o tipo A e outro o tipo B, vale:

a) 0,60 b) 0,18 c) 0,04 d) 0,02 e) 0,30

TE.145 A probabilidade de que um indivíduo sorteado ao acaso, desta comunidade, não tenha o tipo B ou não tenha o tipo AB vale:

a) 0,855 b) 1,85 c) 0,850 d) 1,0
e) nenhuma das anteriores

TE.146 (CESCEM-68) Uma urna contém, 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas pretas e as restantes brancas num total de 10 bolas. Um primeiro experimento consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Num segundo experimento, as bolas das duas urnas são reunidas e destas, duas bulas são retiradas ao acaso. O valor mínimo de x a fim de que a probabilidade de sairem duas bolas pretas seja maior no segundo do que no primeiro experimento é:

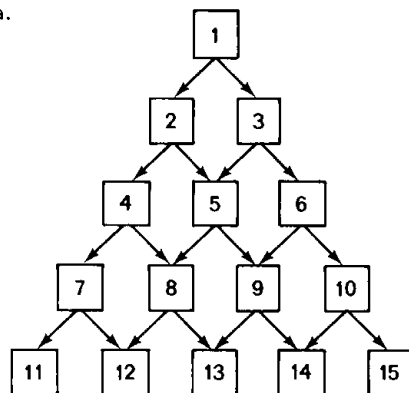
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 9

TE.147 (SANTA CASA-77) Dispõe-se de um mapa.

Dispõe-se também de um dado com 3 faces vermelhas e 3 faces azuis.
Considerando as regras:

I — partindo do quadro 1, pode-se caminhar, no sentido indicado pelas setas para os demais quadros, a cada lançamento do dado.

II — lançando-se o dado, se sair face azul, segue-se pela seta da direita até o quadro seguinte.

III — lançando-se o dado, se sair face vermelha, segue-se pela seta da esquerda até o quadro seguinte.

A probabilidade de chegar ao quadro 13, partindo de 1, é:

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{4}{16}$ c) $\frac{6}{16}$ d) $\frac{8}{16}$ e) $\frac{12}{16}$

TE.148 (CESCEA-74) Lançando-se 4 vezes uma moeda honesta, a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{1}{4}$ e) não sei.

TE.149 (CESCEM-71) Em um jogo de cara ou coroa, em cada tentativa, a moeda é lançada 3 vezes consecutivas. Uma tentativa é considerada um sucesso se o número de vezes que se obtém cara supera estritamente o número de vezes que se obtém coroa. A probabilidade de se obterem 2 sucessos nas 2 primeiras tentativas é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{13}{16}$ e) $\frac{1}{64}$

RESPOSTAS

TE.1 b
TE.2 c
TE.3 c
TE.4 e
TE.5 c
TE.6 d
TE.7 b
TE.8 c
TE.9 d
TE.10 c
TE.11 e
TE.12 b
TE.13 d
TE.14 a
TE.15 d
TE.16 d
TE.17 c
TE.18 c
TE.19 a
TE.20 d
TE.21 b
TE.22 d
TE.23 a
TE.24 d
TE.25 d
TE.26 d
TE.27 d
TE.28 d
TE.29 c
TE.30 b
TE.31 b
TE.32 c
TE.33 a
TE.34 b
TE.35 d
TE.36 a
TE.37 a
TE.38 e
TE.39 b
TE.40 a
TE.41 e
TE.42 b
TE.43 b
TE.44 a
TE.45 d
TE.46 c
TE.47 c
TE.48 e
TE.49 a
TE.50 c
TE.51 a
TE.52 c
TE.53 a
TE.54 a
TE.55 a
TE.56 a
TE.57 b
TE.58 d
TE.59 a
TE.60 a
TE.61 a
TE.62 a
TE.63 c
TE.64 b
TE.65 c
TE.66 d
TE.67 e
TE.68 c
TE.69 c
TE.70 e
TE.71 d
TE.72 c
TE.73 c
TE.74 c
TE.75 b
TE.76 c
TE.77 d
TE.78 e
TE.79 b
TE.80 b
TE.81 e
TE.82 b
TE.83 a
TE.84 b
TE.85 b
TE.86 a
TE.87 e
TE.88 a
TE.89 d
TE.90 e
TE.91 d
TE.92 c
TE.93 a
TE.94 b
TE.95 b
TE.96 b
TE.97 d
TE.98 d
TE.99 c
TE.100 b
TE.101 b
TE.102 d
TE.103 a
TE.104 c
TE.105 b
TE.106 b
TE.107 d
TE.108 c
TE.109 c
TE.110 a
TE.111 e
TE.112 c
TE.113 c
TE.114 b
TE.115 d
TE.116 b
TE.117 d
TE.118 b
TE.119 d
TE.120 e
TE.121 a
TE.122 d
TE.123 d
TE.124 b
TE.125 e
TE.126 d
TE.127 e
TE.128 e
TE.129 b
TE.130 c
TE.131 c
TE.132 b
TE.133 d
TE.134 c
TE.135 d
TE.136 e
TE.137 d
TE.138 a
TE.139 d
TE.140 b
TE.141 c
TE.142 a
TE.143 b
TE.144 c
TE.145 d
TE.146 c
TE.147 c
TE.148 d
TE.149 a